

Capitolo 12

STRUTTURA DEI SISTEMI DISCRETI POSITIVI

12.1 Stabilità asintotica dei sistemi discreti positivi

La stabilità asintotica di un sistema positivo lineare

$$\mathbf{x}(t+1) = F\mathbf{x}(t) \quad (12.1)$$

si definisce come per il caso di un sistema lineare generico. Ovviamente lo stato iniziale deve essere non negativo ma, sebbene il movimento abbia inizio e si svolga soltanto nell'ortante \mathbb{R}_+^n , la condizione (necessaria e sufficiente per la stabilità asintotica di un sistema lineare discreto) che lo spettro di F sia contenuto nel disco unitario aperto di \mathbb{C}^n rimane ancora valida. La convergenza deve infatti essere soddisfatta per ogni vettore iniziale del tipo $\alpha \mathbf{e}_i$, con $\alpha > 0$ ed \mathbf{e}_i vettore canonico, quindi, per linearità, il movimento converge a zero anche se lo stato iniziale è un arbitrario vettore non positivo di \mathbb{R}^n . In altre parole, una matrice $F \geq 0$ induce un sistema positivo asintoticamente stabile se e solo se essa induce un sistema lineare generico asintoticamente stabile e quindi se soddisfa i criteri generali di stabilità lineare studiati nei capitoli precedenti. D'altra parte, la positività di F consente

- di verificare la stabilità asintotica del sistema (12.1) ricorrendo anche a criteri non applicabili nel caso di matrici F non positive;
- di ottenere soluzioni dell'equazione di Lyapunov aventi struttura particolare (diagonale), e di associarle a particolari proprietà che caratterizzano la dinamica dei sistemi positivi stabili.

Proposizione 12.1.1 [STABILITÀ ASINTOTICA DI UN SISTEMA DISCRETO POSITIVO] *Sia $F \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$. Si equivalgono i seguenti fatti:*

- 1) [STABILITÀ ASINTOTICA E SPETTRO DI F] $|\Lambda(F)| < 1$;
- 2) [STABILITÀ ASINTOTICA E M-MATRICI] *la matrice $I_n - F$ è una M-matrice;*
- 3) [STABILITÀ ASINTOTICA E POLINOMIO CARATTERISTICO] $\Delta_{F-I}(z)$, *polinomio caratteristico di $F - I$, ha i coefficienti tutti positivi;*

- 4) per ogni vettore $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$, l'equazione $\mathbf{x} - F\mathbf{x} = \mathbf{p}$ ammette una soluzione $\mathbf{v} \gg \mathbf{0}$;
- 5) [TEORIA DI LYAPUNOV CON FUNZIONI LINEARI COPOSITIVE] esiste una funzione lineare copositiva¹ $V(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}$ soddisfacente

$$\Delta V(\mathbf{x}) := V(F\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}) < 0, \quad \forall \mathbf{x} > \mathbf{0}; \quad (12.2)$$

- 6) [STABILITÀ DIAGONALE] esiste una matrice diagonale

$$D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\} \quad d_1, d_2, \dots, d_n > 0$$

tale che $D - F^T D F$ è definita positiva, ovvero l'equazione di Lyapunov

$$F^T X F - X = -Q \quad (12.3)$$

ammette soluzioni diagonali definite positive per opportune scelte della matrice definita negativa $-Q$.

PROVA Ovviamente, se $F \geq 0$ allora $I_n - F$ è una Z-matrice.

1) \Leftrightarrow 2) È noto che la matrice $\lambda I - F$ è una M-matrice se e solo se $\lambda > \rho(F)$, quindi $I - F$ è una M-matrice se e solo se $1 > \rho(F)$.

L'equivalenza di (2) e (3) è l'equivalenza (0) \Leftrightarrow (ii) della proposizione 11.7.2, l'equivalenza di (2) e (4) è l'equivalenza (0) \Leftrightarrow (xiii) dell'esercizio 11.7.4.

2) \Leftrightarrow 5) Se $I_n - F$ è una M-matrice, lo è la sua trasposta, e per il punto (v) della proposizione 11.7.2 esiste un vettore $\mathbf{d} \gg \mathbf{0}$ in corrispondenza al quale si ha

$$\mathbf{d}^T (I - F) \gg \mathbf{0}^T \quad (12.4)$$

Ponendo $V(\mathbf{x}) = \mathbf{d}^T \mathbf{x}$ si ottiene una funzione lineare copositiva, e postmoltiplicando (12.4) per $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ si ricava la (12.2).

Viceversa, se $V(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}$ è copositiva, allora \mathbf{w} è un vettore strettamente positivo (altrimenti si troverebbero vettori positivi per cui $\mathbf{w}^T \mathbf{x} \leq 0$) e se $V(\mathbf{x})$ soddisfa (12.2) allora

$$\mathbf{w}^T (F\mathbf{x} - \mathbf{x}) < 0, \quad \forall \mathbf{x} > \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{w}^T (I - F)\mathbf{x} > 0, \quad \forall \mathbf{x} > \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{w}^T (I - F) \gg \mathbf{0}^T$$

implica che $I_n - F$ è una M-matrice.

2) \Rightarrow 6) (ARAKI) Poiché $I_n - F$ è una M-matrice, tale è anche la sua trasposta $I_n - F^T$. Esistono allora due vettori strettamente positivi $\mathbf{v} \gg \mathbf{0}$ e $\mathbf{w} \gg \mathbf{0}$ per cui risulta

$$\mathbf{p} := (I_n - F)\mathbf{v} \gg \mathbf{0}, \quad \mathbf{q} := (I_n - F^T)\mathbf{w} \gg \mathbf{0}. \quad (12.5)$$

Posto

$$D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}, \quad d_i = \frac{w_i}{v_i}, \quad (12.6)$$

¹Diremo copositiva una funzione $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto V(\mathbf{x})$ nulla nell'origine e che assume valori positivi per ogni $\mathbf{x} > \mathbf{0}$.

ricaviamo facilmente l'identità

$$\begin{aligned}
 [D - F^T DF]\mathbf{v} &= \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} - F^T DF\mathbf{v} \\
 &= \mathbf{w} - F^T D(\mathbf{v} - \mathbf{p}) = (\mathbf{w} - F^T D\mathbf{v}) + F^T D\mathbf{p} \\
 &= (\mathbf{w} - F^T \mathbf{w}) + F^T D\mathbf{p} = \mathbf{q} + F^T D\mathbf{p} \gg \mathbf{0}. \quad (12.7)
 \end{aligned}$$

$Q := D - F^T DF$ è una Z-matrice, quindi per (12.7) e l'equivalenza (0) \Leftrightarrow (v) della proposizione 11.7.2, è una M-matrice e, essendo simmetrica, è definita positiva². È ora evidente che la matrice diagonale D è soluzione definita positiva dell'equazione $F^T X F - X = -Q$. 6) \Rightarrow 1) ovvio. ■

- ESERCIZIO 12.1.1 [STABILITÀ ASINTOTICA DEI SISTEMI POSITIVI DEL SECONDO ORDINE] Gli autovalori della matrice non negativa

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \geq 0$$

hanno modulo minore di 1 se e solo se è soddisfatta una delle seguenti condizioni (fra loro equivalenti):

- in $\Delta_F(s) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$ i coefficienti soddisfano $\alpha_1 > -2$ e $\alpha_0 + \alpha_1 > -1$;
- $\text{tr}(F) < 2$ e $\det(F) > \text{tr}(F) - 1$;
- $f_{11} < 1$ e $f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} > f_{11} + f_{22} - 1$;
- $1 - f_{11} > 0$, $1 - f_{22} > 0$ e $(1 - f_{11})(1 - f_{22}) > f_{12}f_{21}$;

‡ *Soluzione.* La matrice $F > 0$ è di Schur $\Leftrightarrow I - F$ è una M-matrice (proposizione 12.1.1 (2)) \Leftrightarrow il polinomio $\Delta_{F-I}(z) = z^2 + (2 - f_{11} - f_{22})z + (1 - f_{11} - f_{22} + f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})$ ha coefficienti positivi (proposizione 11.7.2 (ii)) $\Leftrightarrow \text{tr}(F) < 2$ e $\det(F) > \text{tr}(F) - 1$ (immediato) $\Leftrightarrow 1 - f_{11} > 0$ e $(1 - f_{11})(1 - f_{22}) > f_{12}f_{21}$ (proposizione 11.7.2 (viii)) [e quindi anche $1 - f_{22} > 0$]

- ESERCIZIO 12.1.2 (i) Condizione necessaria affinché gli autovalori di una matrice $F \geq 0$ abbiano modulo minore di 1 è che il polinomio caratteristico $\Delta_F(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_{n-1} z^{n-1} + z^n$ soddisfi la condizione $\Delta_F(1) > 0$.

(ii) La condizione è anche sufficiente se in $\Delta_F(z)$ si ha $\alpha_i \leq 0$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ (quindi, ad esempio, se F è la matrice di Leslie, della quale si è calcolato il polinomio caratteristico nell'Esempio 11.5.1).

‡ *Sugg.* (i) Se l'autovalore di Perron λ_0 è minore di 1, in $\Delta_F(z) = (z - \lambda_0)(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_{n-1})$ tutti i fattori, valutati per $z = 1$, hanno parte reale positiva e i fattori non reali, accoppiati con i rispettivi coniugati, danno contributo positivo al prodotto.

(ii) La condizione $\Delta_F(1) > 0$, ossia $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + 1 > 0$, implica che i coefficienti di $\det(zI - (F - I)) = \det((z + 1)I - F) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \dots + \gamma_{n-1} z^{n-1} + z^n$ siano positivi, risultando $\gamma_k = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} \alpha_{n-1} + \dots + \binom{k+1}{k} \alpha_{k+1} + \alpha_k \geq \binom{n}{k} + \binom{n}{k} \alpha_{n-1} + \dots + \binom{n}{k} \alpha_{k+1} + \binom{n}{k} \alpha_k > 0$.

Il fatto che $I_n - F$ sia una M-matrice e la possibilità di trovare soluzioni diagonali all'equazione di Lyapunov comportano alcune interessanti conseguenze circa la dinamica di un sistema discreto positivo asintoticamente stabile.

a) Alle soluzioni diagonali dell'equazione di Lyapunov rimangono associate funzioni di Lyapunov definite positive del tipo

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T D \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2, \quad (12.8)$$

²una matrice simmetrica è definita positiva se e solo se i suoi autovalori hanno parte reale positiva. Le Z-matrici simmetriche definite positive si chiamano *matrici di Stieltjes*; quindi Q è matrice di Stieltjes.

le cui superfici di livello sono ellissoidi aventi come assi principali gli assi coordinati. Se $\mathbf{x}(t) > \mathbf{0}$ e risulta $V(\mathbf{x}(t+1)) - V(\mathbf{x}(t)) < 0$, da (12.8) segue che una almeno delle componenti dello stato subisce un decremento fra l'istante t e l'istante $t+1$.

b) per qualche stato $\mathbf{x} \gg \mathbf{0}$ l'evoluzione libera in un passo ne decrementa tutte le componenti. Infatti $I_n - F$ è una M-matrice, quindi esiste un vettore strettamente positivo \mathbf{x} per cui vale $(I_n - F)\mathbf{x} \gg \mathbf{0}$. Se si cambia la base nello spazio di stato e si considera il sistema algebricamente equivalente descritto dalla matrice $\hat{F} = D^{-1}FD$, dove D è la matrice diagonale positiva che rende $I_n - F$ diagonalmente dominante per righe, si ha

$$\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t+1) = (I_n - \hat{F})\hat{\mathbf{x}}(t) \gg \mathbf{0}$$

per $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{1}_n$ e per ogni stato $\hat{\mathbf{x}}(t)$ sufficientemente prossimo alla direzione di $\mathbf{1}_n$.

c) Se $\mathcal{N} = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k\}$ è un sottoinsieme di $\{1, 2, \dots, n\}$ e $F_{\mathcal{N}}$ è la matrice di ordine k ottenuta selezionando righe e colonne di F con indici in \mathcal{N} , allora la stabilità asintotica del sistema positivo $\mathbf{x}(t+1) = F\mathbf{x}(t)$ comporta quella del sistema $\tilde{\mathbf{x}}(t+1) = F_{\mathcal{N}}\tilde{\mathbf{x}}(t)$. Basta applicare il corollario 11.6.2 (oppure osservare che se $I_n - F$ è una M-matrice, lo è anche la sottomatrice $I_k - F_{\mathcal{N}}$).

12.2 Statica comparativa

Un sistema positivo non omogeneo è descritto da un'equazione del tipo

$$\mathbf{x}(t+1) = F\mathbf{x}(t) + \mathbf{p}, \quad (12.9)$$

dove F e \mathbf{p} sono una matrice e un vettore non negativi. Tipicamente, (12.9) descrive la dinamica di un sistema sollecitato da un ingresso $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$ costante nel tempo (e allora \mathbf{p} corrisponde al termine $G\bar{\mathbf{u}}$ nella usuale equazione di stato) e i problemi di maggior interesse riguardano l'esistenza e la stabilità di uno stato di equilibrio non negativo, ossia di uno stato $\mathbf{x}_e \geq \mathbf{0}$ per cui si abbia

$$\mathbf{x}_e = F\mathbf{x}_e + \mathbf{p}, \quad (12.10)$$

nonché le variazioni che \mathbf{x}_e subisce in corrispondenza a cambiamenti nei parametri del sistema (i.e. nelle componenti di F e \mathbf{p}).

È chiaro che l'invertibilità della matrice $(I_n - F)$ è condizione necessaria e sufficiente perché (12.10) ammetta una soluzione per ogni vettore $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$. La discussione è più articolata quando si chiedi, com'è naturale nel caso di un sistema positivo, che \mathbf{x}_e sia un vettore non negativo e quando si desideri che l'equilibrio in \mathbf{x}_e abbia carattere di stabilità. In particolare, per quanto riguarda la stabilità di \mathbf{x}_e , sottraendo (12.10) da (12.9) otteniamo

$$\Delta\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{x}(t+1) - \mathbf{x}_e = F(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e) = F\Delta\mathbf{x}(t), \quad (12.11)$$

cosicché i caratteri di stabilità (semplice o asintotica) dell'equilibrio in \mathbf{x}_e si riconducono a quelli dell'equilibrio nell'origine del sistema omogeneo.

Proposizione 12.2.1 [EQUILIBRIO POSITIVO E STABILITÀ ASINTOTICA DI UN SISTEMA NON OMOGENEO] *Sia F una matrice non negativa.*

- i) Se $|\Lambda(F)| < 1$, allora (12.10) ha una e una sola soluzione $\mathbf{x}_e \geq \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$.
- ii) Se in corrispondenza a qualche $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ esiste una soluzione $\mathbf{x}_e \geq \mathbf{0}$ di (12.10), allora tutti gli autovalori di F hanno modulo minore di 1.
- iii) Se $|\Lambda(F)| < 1$, lo stato di (12.9) converge asintoticamente a \mathbf{x}_e per ogni condizione iniziale $\mathbf{x}(0)$.

PROVA i) Se gli autovalori di F hanno tutti modulo minore di 1, $I_n - F$ è invertibile, con inversa positiva, quindi per ogni $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ l'unica soluzione di (12.10) è

$$\mathbf{x}_e = (I_n - F)^{-1} \mathbf{p} \geq \mathbf{0}.$$

ii) Se vale (12.10) con $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ ed $\mathbf{x}_e \geq \mathbf{0}$ deve intanto essere $\mathbf{x}_e \gg \mathbf{0}$. Ma allora, premoltiplicando entrambi i membri di (12.10) per un autovettore sinistro positivo \mathbf{w}_0 di F corrispondente all'autovalore massimale λ_0 , si ricava

$$(1 - \lambda_0) \mathbf{w}_0^T \mathbf{x}_e = \mathbf{w}_0^T \mathbf{p} > 0 \quad (12.12)$$

da cui segue $\lambda_0 < 1$ e quindi $|\Lambda(F)| < 1$.

iii) Conseguenza da (12.11). ■

Esempio 12.2.1 [OBSCOLESCENZA E RINNOVO DI UN PARCO MACCHINE] Si consideri un parco macchine ripartito in n classi di obsolescenza. Nell'ipotesi che le macchine, superata la n -esima classe di età, vengano comunque rottamate e che non vengano immesse nel parco macchine nuove, il sistema evolve (e si estingue) con una dinamica data dal modello di Leslie con tassi di fertilità tutti nulli

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 & & & & \\ & \beta_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad 0 < \beta_i < 1.$$

Si supponga ora che la politica di produzione di nuove macchine nell'anno $t+1$ preveda di mettere in esercizio una quota fissa $\mathbf{e}_1 \bar{u}$ più una quota $\alpha x_n(t)$, proporzionale al numero di macchine rottamate per aver superato la classe n -esima. Abbiamo allora

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \alpha \\ \beta_1 & & & & \\ & \beta_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \bar{u} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = F\mathbf{x}(t) + \mathbf{p}.$$

Il polinomio caratteristico di F è $\Delta_F(z) = z^n - \gamma$, con $\gamma := \alpha\beta_1\beta_2 \dots \beta_{n-1}$, quindi l'autovalore di Perron è $\sqrt[n]{\gamma}$ e, per il teorema di Cayley-Hamilton, vale l'identità $F^n = \gamma I_n$. Poiché vale anche l'identità $(I + F + \dots + F^{n-1})\mathbf{e}_1 = [1 \ \beta_1 \ \beta_1\beta_2 \ \dots \ \prod_{i=1}^{n-1} \beta_i]^T$, se risulta $\gamma < 1$ o, equivalentemente, se $|\Lambda(F)| < 1$, la distribuzione di equilibrio è data da

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_e &= (I_n - F)^{-1} \mathbf{p} = \bar{u}(I_n + F^n + F^{2n} + \dots)(I_n + F + \dots + F^{n-1})\mathbf{e}_1 \\ &= \bar{u}(1 + \gamma + \gamma^2 + \dots) \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_1\beta_2 \\ \vdots \\ \prod_{i=1}^{n-1} \beta_i \end{bmatrix} = \frac{\bar{u}}{1 - \gamma} \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_1\beta_2 \\ \vdots \\ \prod_{i=1}^{n-1} \beta_i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- ESERCIZIO 12.2.1 (i) Si ponga

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e si verifichi che l'equazione (12.10) ammette una soluzione $\mathbf{x}_e > \mathbf{0}$ ma $\rho(F) > 1$. Quindi, per trarre la conclusione del punto (ii) nella proposizione 12.2.1, l'ipotesi che il vettore \mathbf{p} sia strettamente positivo non può essere indebolita, a meno di non introdurre qualche ipotesi aggiuntiva.

- (ii) La conclusione del punto (ii) nella proposizione 12.2.1 continua a valere se si assume $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ e se
 - esiste $k > 0$ per cui $\mathbf{p} + F\mathbf{p} + \dots + F^k\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ oppure
 - la coppia (F, \mathbf{p}) è raggiungibile.

‡ *Suggerimento: si ricavi la condizione $\mathbf{x}_e = F^{k+1}\mathbf{x}_e + (\mathbf{p} + F\mathbf{p} + \dots + F^k\mathbf{p})$ e si noti che F^{k+1} , e con essa F , deve avere autovalori a modulo minore di 1. In particolare, se la coppia (F, \mathbf{p}) è raggiungibile, il vettore $\mathbf{p} + F\mathbf{p} + \dots + F^{n-1}\mathbf{p}$ non può avere una componente nulla, altrimenti tutti gli stati raggiungibili l'avrebbero, contraddicendo l'ipotesi di raggiungibilità.*

Esempio 12.2.2 [MODELLO STATICO DI LEONTIEF] L'equazione del modello statico di Leontief, considerato nell'esempio 11.2.1,

$$\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{d}.$$

ha la medesima struttura di (12.10). Perciò, se gli autovalori della matrice tecnologica T hanno modulo minore di 1, in corrispondenza ad ogni livello di domanda $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$ esiste uno e un solo livello di produzione \mathbf{x} in grado di soddisfare le richieste del mercato. Gli addendi della soluzione

$$\mathbf{x} = (I_n - T)^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{d} + T\mathbf{d} + T^2\mathbf{d} + \dots$$

sono suscettibili di una interessante interpretazione, in cui vengono considerati i prodotti immessi direttamente sul mercato (il vettore \mathbf{d}) separatamente da quelli prodotti per essere trasferiti da un settore produttivo a un altro, questi ultimi classificati a loro volta in funzione del numero di "passaggi" fra i settori produttivi. In dettaglio,

- la componente i -esima $[T\mathbf{d}]_i = \sum_k t_{ik}d_k$ del vettore $T\mathbf{d}$ rappresenta il livello di produzione richiesto al settore i -esimo per fornire ai vari settori l' i -esimo prodotto in qualità di strumento tecnologico necessario per soddisfare la domanda \mathbf{d} ,
- la componente i -esima $[T^2\mathbf{d}]_i$ del vettore $T^2\mathbf{d}$ rappresenta il livello di produzione richiesto al settore i -esimo per fornire ai vari settori l' i -esimo prodotto come strumento tecnologico di secondo livello, necessario cioè per produrre gli articoli di $T\mathbf{d}$,
- etc.

D'altra parte, se la domanda del mercato riguarda prodotti provenienti da tutti i settori dell'economia (ovvero se $\mathbf{d} \gg \mathbf{0}$), l'esistenza di un livello di produzione \mathbf{x} in grado di soddisfare le richieste è subordinata al fatto che la matrice tecnologica T sia asintoticamente stabile.

Per l'esercizio 12.2.1, la stessa condizione di stabilità è necessaria anche quando il vettore della domanda \mathbf{d} non è strettamente positivo, ma esiste $k > 0$ per cui è strettamente positivo il vettore $\mathbf{d} + T\mathbf{d} + \dots + T^k\mathbf{d}$, ovvero è strettamente positivo il vettore che rappresenta la domanda del mercato più la domanda correlata di strumenti tecnologici fino al livello k .

Similmente, per quanto riguarda prezzi e utili possiamo riscrivere la (11.22) nella forma

$$\mathbf{u}^T = \mathbf{p}^T(I_n - T)$$

e concludere che, se gli autovalori di T hanno modulo minore di 1, in corrispondenza ad ogni vettore di utili $\mathbf{u}^T \geq \mathbf{0}^T$ esiste uno e un solo vettore di prezzi \mathbf{p} in grado di determinarlo.

Se gli autovalori del sistema (12.9) hanno modulo minore di 1, è possibile valutare come variano le coordinate del punto di equilibrio \mathbf{x}_e quando vengano perturbati gli elementi della matrice F (preservandone stabilità e struttura non negativa) e/o le componenti del vettore \mathbf{p} (sempre col vincolo che esso rimanga non negativo).

Problemi di questo tipo rientrano nel capitolo della cosiddetta "statica comparativa", in cui gli effetti delle modificazioni nei parametri del sistema vengono studiati con riferimento alle nuove condizioni di regime, senza interessarsi al "transitorio" cui il sistema va incontro

una volta abbandonato il vecchio equilibrio. Va notato che la possibilità di trascurare gli aspetti dinamici del transitorio è subordinata all'ipotesi di stabilità del nuovo punto di equilibrio, grazie alla quale è comunque garantita la convergenza dell'evoluzione di stato.

Proposizione 12.2.2 [VARIAZIONI PARAMETRICHE DEL SISTEMA E PERTURBAZIONI DELL'EQUILIBRIO] *Si considerino i sistemi positivi*

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}(t+1) &= \bar{F}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{p}} \\ \mathbf{x}(t+1) &= F\mathbf{x}(t) + \mathbf{p}\end{aligned}\quad (12.13)$$

con

$$\bar{F} \geq F \geq 0, \quad \bar{\mathbf{p}} \geq \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \quad (12.14)$$

e con \bar{F} (e conseguentemente F) asintoticamente stabile. Allora

i) i corrispondenti stati di equilibrio dei due sistemi

$$\bar{\mathbf{x}}_e = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \\ \vdots \\ \bar{\xi}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

soddisfano la disuguaglianza $\bar{\mathbf{x}}_e \geq \mathbf{x}_e \geq \mathbf{0}$;

ii) se $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ e se in (12.14) tutte le righe di \bar{F} risultano eguali alle corrispondenti di F , eccetto la r -esima, e tutte le componenti di $\bar{\mathbf{p}}$ risultano eguali alle corrispondenti di \mathbf{p} , eccetto la r -esima, ovvero se

$$\begin{cases} \bar{f}_{ij} = f_{ij} & \forall i \neq r, \forall j \\ \bar{f}_{rj} \geq f_{rj} & \forall j \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \bar{b}_i = b_i > 0 & \forall i \neq r \\ \bar{b}_r \geq b_r > 0 \end{cases} \quad (12.15)$$

allora il massimo incremento relativo delle componenti di $\bar{\mathbf{x}}_e$ rispetto alle componenti omologhe di \mathbf{x}_e si verifica in corrispondenza alla componente r -esima, ovvero per ogni i risulta

$$\frac{\bar{\xi}_r}{\xi_r} \geq \frac{\bar{\xi}_i}{\xi_i} \quad (12.16)$$

PROVA i) Per la stabilità asintotica di entrambi i sistemi, le matrici $(I_n - \bar{F})^{-1}$ e $(I_n - F)^{-1}$ sono esprimibili come sviluppi convergenti in serie di matrici positive e di conseguenza

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_e &= (I_n - \bar{F})^{-1}\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}} + \bar{F}\bar{\mathbf{p}} + \bar{F}^2\bar{\mathbf{p}} + \dots \\ &\geq \mathbf{p} + F\mathbf{p} + F^2\mathbf{p} + \dots = (I_n - F)^{-1}\mathbf{p} = \mathbf{x}_e\end{aligned}\quad (12.17)$$

ii) Se $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$, entrambi i vettori \mathbf{x}_e e $\bar{\mathbf{x}}_e$ sono strettamente positivi e tutti i rapporti in (12.16) hanno significato e sono non inferiori a 1. Si ponga

$$a_i = \frac{\bar{\xi}_i}{\xi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

e sia $m = \max_i a_i$. Vogliamo provare che $m = a_r$. Se per qualche indice $h \neq r$ si avesse

$$a_h = m > a_r \geq 1,$$

allora da

$$a_h \xi_h = \bar{\xi}_h = \sum_{j=1}^n \bar{f}_{hj} \bar{\xi}_j + \bar{b}_h = \sum_{j=1}^n f_{hj} \bar{\xi}_j + b_h = \sum_{j=1}^n f_{hj} a_j \xi_j + b_h \quad (12.18)$$

tenendo conto che $a_h > 1$, $b_h > 0$ e $a_j/a_h \leq 1$, si otterrebbe l'assurdo

$$\xi_h = \sum_{j=1}^n f_{hj} \frac{a_j}{a_h} \xi_j + \frac{b_h}{a_h} < \sum_{j=1}^n f_{hj} \xi_j + b_h = \xi_h. \quad \blacksquare$$

12.3 Sistemi compartimentali

Un sistema compartimentale consiste di vari sottosistemi, detti “compartimenti”, in ciascuno dei quali vengono immagazzinate quantità non negative di sostanze materiali. Le ipotesi strutturali, sia per i modelli a tempo continuo che per quelli a tempo discreto, prevedono che

- i compartimenti siano cineticamente omogenei, nel senso che qualsiasi materiale che fluisca in un compartimento si misceli immediatamente con il materiale già presente,
- i compartimenti interagiscano fra loro tramite processi di trasporto e/o di diffusione dei materiali accumulati,
- valga la legge di conservazione della massa.

Nel caso di modelli compartimentali a tempo discreto, cui è dedicato questo paragrafo, si assume che

- il trasferimento del materiale fra i compartimenti e dall'esterno verso i compartimenti avvenga negli istanti $t \in \mathbb{Z}$, o riferendo comunque all'istante t le quantità complessivamente scambiate nell'intervallo $[t, t + 1)$;
- la quantità di materiale che in $[t, t + 1)$ viene iniettata nel compartimento j -esimo da ingressi esterni al sistema è $u_j(t) \geq 0$;
- se $x_j(t)$ denota la quantità di materiale presente nel compartimento j -esimo all'istante t , la quantità di materiale in uscita dal compartimento j -esimo verso il compartimento i -esimo in $[t, t + 1)$ dipende linearmente da $x_j(t)$ ed è espressa da $f_{ij} x_j(t)$, $f_{ij} \geq 0 \forall i \neq j$;
- il materiale $\sum_{i: i \neq j} f_{ij} x_j(t)$ complessivamente ceduto dal compartimento j -esimo agli altri compartimenti in $[t, t + 1)$ non può superare la quantità inizialmente presente $x_j(t)$, ovvero $x_j(t) \geq \sum_{i \neq j} f_{ij} x_j(t)$ e quindi $1 \geq \sum_{i \neq j} f_{ij}$;

- la quantità di materiale presente nel compartimento j -esimo all'istante $t + 1$ è data allora da

$$x_j(t + 1) = \underbrace{\sum_{i: i \neq j} f_{ji} x_i(t)}_{\text{flusso entrante dai compartimenti } i \text{ verso } j} + \underbrace{u_j(t)}_{\text{flusso dall'esterno verso } j} + \underbrace{f_{jj} x_j(t)}_{\text{residuo di } x_j(t) \text{ rimasto in } j \text{ al tempo } t+1} \quad (12.19)$$

dove $f_{jj} x_j(t)$ rappresenta il materiale residuo presente nel compartimento j -esimo al tempo $t + 1$ quando si suppongano nulli $x_i(t)$, $i \neq j$, e $u_j(t)$. Tale quantità residua non può eccedere il valore $(1 - \sum_{i \neq j} f_{ij}) x_j(t)$ e può risultarne inferiore se si ipotizza la presenza di una eventuale uscita verso l'esterno $h_j x_j(t)$, risultando quindi

$$0 \geq f_{jj} = 1 - h_j - \sum_{i \neq j} f_{ij} \leq 1 - \sum_{i \neq j} f_{ij}. \quad (12.20)$$

Se n è il numero dei compartimenti, si ottiene un sistema lineare positivo di dimensione n

$$\mathbf{x}(t + 1) = F\mathbf{x}(t) + G\mathbf{u}(t) \quad (12.21)$$

in cui le m colonne di G sono opportuni vettori della base canonica di \mathbb{R}^n e la matrice positiva F ha la proprietà, espressa da (12.20), che la somma degli elementi in ciascuna colonna non eccede l'unità.

Ciò implica che l'autovalore massimale di F non ecceda 1, e sia inferiore a 1 quando le somme di colonna sono tutte inferiori a 1. In questo caso è garantita la stabilità asintotica dell'equilibrio nell'origine (se sono nulli gli ingressi esterni).

Proposizione 12.3.1 *Si supponga che la matrice F di un sistema compartimentale sia irriducibile. Allora*

- il raggio spettrale di F è unitario se e solo se tutte le somme di colonna sono unitarie;
- se il raggio spettrale è unitario, il sistema è semplicemente stabile.

PROVA Se le somme di colonna sono tutte unitarie, l'autovalore di Perron è $\lambda_0 = 1$ e, per la proposizione 11.5.1, tutti gli autovalori di F a modulo unitario sono radici semplici del suo polinomio caratteristico. Quindi il sistema compartimentale è semplicemente, ma non asintoticamente, stabile.

Se una almeno delle somme di colonna non è unitaria, si possono incrementare alcuni elementi non nulli della matrice F , pervenendo a una matrice irriducibile \bar{F} in cui sono unitarie tutte le somme di colonna. Per il punto (v) della proposizione 11.5.1, l'autovalore dominante di F è inferiore a quello (unitario) di \bar{F} , quindi F è asintoticamente stabile. ■

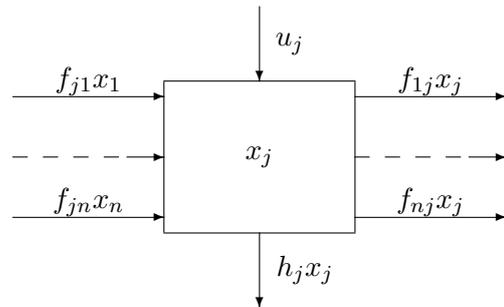


figura 12.3.1

- **ESERCIZIO 12.3.1** [*F* RIDUCIBILE] Se F è riducibile, e ridotta per cogredienza a forma normale, si verifichi che

(i) un blocco diagonale $\bar{F}_{j,j}$ irriducibile ha l'autovalore massimale unitario solo se le somme di ciascuna sua colonna sono unitarie e quindi i blocchi sottostanti $\bar{F}_{i,j}, i > j$ sono identicamente nulli. Nelle potenze F^k della matrice F , al divergere di k

(ii) i blocchi diagonali rimangono limitati, non tendono a zero se sono irriducibili e hanno autovalore unitario, mentre sono infinitesimi altrimenti;

(iii) i blocchi sottostanti la diagonale rimangono nulli se sottostanno ad una matrice diagonale irriducibile con autovalore unitario, rimangono comunque limitati negli altri casi.

Esempio 12.3.1 [QUALITÀ IN UNA GERARCHIA] Una struttura gerarchica e la sua evoluzione possono essere descritte da un sistema compartimentale. Si supponga che la popolazione sia organizzata su N livelli gerarchici, dei quali il più basso sia il primo, il più alto l' N -esimo, e che ogni livello si suddivida in ν classi di prestazione, la prima classe rappresentando la prestazione migliore e la ν -esima la prestazione più modesta

Ogni individuo nell'anno t -esimo è quindi caratterizzato dal livello gerarchico ricoperto e dalla classe di prestazione entro cui si colloca la qualità del compito svolto. Concluso l'anno t -esimo, l'individuo può rimanere per l'anno successivo al medesimo livello dell'anno precedente, oppure può essere promosso al livello gerarchico superiore, o uscire dalla gerarchia. Si può ipotizzare, altresì, che, rimanendo nella gerarchia, l'individuo cambi la sua classe di prestazione: ad esempio, se non cambia livello, può avvenire che nell'anno successivo svolga più efficacemente le sue mansioni grazie all'esperienza acquisita, e quindi si collochi in una classe di prestazione più elevata; se è passato al livello superiore, si può ipotizzare che l'inesperienza lo collochi in una classe di qualità bassa (oppure, viceversa, che l'entusiasmo e la soddisfazione per la nuova posizione raggiunta lo inducano a svolgere i nuovi compiti in modo egregio...). In corrispondenza all'anno t -esimo, siano

- $\mathbf{x}(t)$ il vettore con $N\nu$ componenti che rappresenta la popolazione della gerarchia,
- $\mathbf{x}_i(t)$ il sottovettore di $\mathbf{x}(t)$ (con ν componenti) rappresentativo del livello i -esimo, ossia della parte di popolazione che, nella gerarchia, appartiene al livello gerarchico i ,
- $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i\nu}$ le componenti del blocco $\mathbf{x}_i(t)$, che specificano il numero degli individui del livello i -esimo che appartengono alla prima, alla seconda, \dots , alla ν -esima classe di prestazione.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_i(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N(t) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left\langle \begin{array}{l} \vdots \\ \mathbf{x}_{i1}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{i\nu}(t) \\ \vdots \end{array} \right. \leftarrow \begin{array}{l} \text{prestazione scadente} \\ \vdots \\ \text{prestazione eccellente} \end{array} \end{array}$$

All'inizio dell'anno $t + 1$ il vettore di popolazione entro ciascun livello viene modificato in accordo con due matrici di transizione. Una prima matrice R_i , di "riciclo" entro il livello i -esimo, definisce la nuova distribuzione di qualità di coloro che non sono stati promossi al livello successivo. Si tratta di una matrice non negativa la cui colonna ℓ -esima fornisce le frazioni, nelle varie classi di prestazione, degli individui che nell'anno precedente appartenevano alla ℓ -esima classe di prestazione. La somma delle componenti di ciascuna colonna non può superare l'unità e, in genere, è inferiore a 1, perchè alcuni individui sono promossi o abbandonano il sistema (e quindi escono dal livello). Quindi $R_i \mathbf{x}_i(t)$ rappresenta il contributo al blocco i -esimo $\mathbf{x}_i(t + 1)$ dovuto agli individui appartenenti nell'anno t al livello i e non promossi.

La seconda matrice è la matrice di promozione P_{i+1} dal livello i al livello $i + 1$. Applicata al vettore $\mathbf{x}_i(t)$, essa definisce con le componenti della sua colonna ℓ -esima la distribuzione, nelle varie classi di prestazione, dei promossi del livello i che provengono dalla classe di prestazione ℓ -esima al tempo t . Chiaramente si ha

$$\mathbf{x}_i(t + 1) = P_{i-1} \mathbf{x}_{i-1}(t) + R_i \mathbf{x}_i(t), \quad i = 2, \dots, N$$

Supponiamo che gli individui entrino sempre nella gerarchia al livello più basso, che al momento dell'assunzione la distribuzione di qualità nel primo livello sia rappresentata da un vettore stocastico $\mathbf{q} \in \mathbb{R}_+^\nu$ e che ogni anno entri un numero costante \bar{u} di nuovi individui. Il primo livello della gerarchia è descritto allora dall'equazione

$$\mathbf{x}_1(t+1) = R_1 \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{q}\bar{u}$$

e il sistema complessivo da

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t+1) \\ \mathbf{x}_2(t+1) \\ \mathbf{x}_3(t+1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & & & & \\ P_2 & R_2 & & & \\ & P_3 & R_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & P_N & R_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_3(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}\bar{u} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = F\mathbf{x}(t) + \mathbf{p}.$$

La somma degli elementi di ciascuna colonna della matrice F non eccede 1: se $i < N$, gli individui che appartengono al tempo t alla i -esima classe di qualità del livello i -esimo e che non escono dalla gerarchia, si ripartiscono al tempo $t+1$ nelle classi di qualità del livello i -esimo e del livello $i+1$ -esimo. Si tratta quindi di un modello a compartimenti. Qui supporremo, per semplicità, che tutte le colonne di F abbiano somma minore di 1, ovvero che da ogni classe di qualità in ogni livello si abbiano ogni anno alcune uscite dalla gerarchia: conseguentemente il raggio spettrale di F è minore di 1 e il sistema raggiunge lo stato di equilibrio asintoticamente stabile

$$\bar{\mathbf{x}} = (I_{N\nu} - F)^{-1} \mathbf{p}.$$

Supporremo inoltre che le matrici di riciclo siano eguali fra loro e che lo stesso valga per le matrici di promozione:

$$R_1 = R_2 = \dots = R_N := R, \quad P_2 = P_3 = \dots = P_N := P$$

Se $\bar{\mathbf{x}}_i$, $i = 1, \dots, N$, sono i blocchi relativi ai livelli gerarchici nel vettore di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$, da $\bar{\mathbf{x}} = (I - F)\mathbf{p}$ si ricava il sistema

$$\begin{aligned} (I - R)\bar{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{q}\bar{u} \\ -P\bar{\mathbf{x}}_1 + (I - R)\bar{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{0} \\ -P\bar{\mathbf{x}}_2 + (I - R)\bar{\mathbf{x}}_3 &= \mathbf{0} \\ &\vdots \\ -P\bar{\mathbf{x}}_{N-1} + (I - R)\bar{\mathbf{x}}_N &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (12.22)$$

di cui si può calcolare ricorsivamente la soluzione

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_1 &= (I_\nu - R)^{-1} \mathbf{g}\bar{u} \\ \bar{\mathbf{x}}_{i+1} &= (I_\nu - R)^{-1} P\bar{\mathbf{x}}_i \end{aligned} \quad (12.23)$$

e, ponendo $\Phi = (I_\nu - R)^{-1}P$ e $\beta = (I_\nu - R)^{-1} \mathbf{g}\bar{u}$,

$$\bar{\mathbf{x}}_i = \Phi^{i-1} \beta,$$

Poiché si è ipotizzato che le somme di colonna di F valgano tutte meno di 1, la matrice di riciclo R ha tutti gli autovalori a modulo minore di 1 e perciò $I_\nu - R$ è invertibile con inversa positiva. Quando Φ è primitiva³, per N è piuttosto grande (ossia se la gerarchia è composta di molti livelli), i blocchi $\bar{\mathbf{x}}_i$, per i elevato, e in particolare $\bar{\mathbf{x}}_N$ risulteranno allineati con il vettore di Perron di Φ . La distribuzione di qualità nei livelli più elevati risulterà quindi indipendente da quella del personale in ingresso, dipendendo invece da R (e quindi dalle "politiche" di aggiornamento e/o di collocamento in quiescenza del personale) e da P (cioè dai criteri di promozione).

³ciò accade, ad esempio, se R è primitiva e P non ha colonne nulle (i.e. sono possibili, eventualmente con frequenze molto basse ma non nulle, promozioni da ogni livello al successivo, a partire da qualsiasi classe di prestazione), oppure se R è triangolare inferiore, con elementi sotto la diagonale tutti positivi (le conoscenze e le competenze del personale non ancora promosso si incrementano e si aggiornano) e P è triangolare superiore con elementi su e sopra la diagonale tutti positivi (le prestazioni dei promossi possono appartenere ad ogni classe di qualità eguale e/o inferiore a quella che presentavano nel livello precedente).

Definizione 12.3.2 In un sistema di n compartimenti, chiameremo “pozzo” un sottoinsieme non vuoto \mathcal{T} di compartimenti⁴, dal quale è nullo il flusso verso l’ambiente e verso gli altri compartimenti che non appartengono a \mathcal{T} . Il pozzo \mathcal{T} è “semplice” se nessun suo sottoinsieme proprio è a sua volta un pozzo.

Rinumerando i compartimenti, è sempre possibile supporre che quelli del pozzo siano gli ultimi, di indice $m + 1, m + 2, \dots, n$. In tal caso dovranno essere nulli sia i flussi dai compartimenti del pozzo \mathcal{T} , di indice $j = m + 1, m + 2, \dots, n$ verso gli altri, di indici $i = 1, 2, \dots, m$, ovvero

$$f_{ij} = 0 \quad \text{per} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \\ j = m + 1, m + 2, \dots, n \end{cases} \quad (12.24)$$

sia i flussi dai compartimenti di \mathcal{T} verso l’esterno:

$$h_{m+1} = h_{m+2} = \dots = h_n = 0. \quad (12.25)$$

(12.24) comporta che le colonne di F con indici in \mathcal{T} siano diverse da zero solo in corrispondenza al blocco diagonale indicato in \mathcal{T} , mentre (12.25) comporta che nel predetto blocco diagonale F ciascuna delle colonne $m + 1, m + 2, \dots, n$ abbia somma unitaria. Quindi la matrice F ha struttura (cogrediente a una) triangolare a blocchi

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \quad (12.26)$$

in cui le $n - m$ colonne di F_{22} hanno somma unitaria. Come caso particolare, per $m = 0$, il blocco F_{11} può essere vuoto.

Proposizione 12.3.3 [POZZI E FORMA NORMALE DI UN SISTEMA COMPARTIMENTALE]
Il sistema compartimentale discreto (12.21) contiene un pozzo se e solo se lo spettro della matrice F contiene l’autovalore 1.

Se l’autovalore 1 appartiene a $\Lambda(F)$ ed ha molteplicità algebrica h ,

- i) h corrisponde al numero dei pozzi semplici presenti nel sistema;
- ii) i compartimenti possono essere raggruppati in $p \geq h$ sottoinsiemi disgiunti $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_p$ tali che, per ogni i , il sottoinsieme di compartimenti \mathcal{S}_i non riceve flusso dai successivi sottoinsiemi $\mathcal{S}_{i+1}, \dots, \mathcal{S}_p$ e gli ultimi h sottoinsiemi $\mathcal{S}_{p-h+1}, \dots, \mathcal{S}_p$ sono pozzi semplici;
- iii) la matrice F è cogrediente a una matrice con struttura

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} F_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ F_{21} & F_{22} & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & & \\ F_{p-h,1} & F_{p-h,2} & \dots & F_{p-h,p-h} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline F_{p-h+1,1} & F_{p-h+1,2} & \dots & F_{p-h+1,p-h} & F_{p-h+1,p-h+1} & 0 & \dots & 0 \\ F_{p-h+2,1} & F_{p-h+2,2} & \dots & F_{p-h+2,p-h} & 0 & F_{p-h+2,p-h+2} & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \\ F_{p,1} & F_{p,2} & \dots & F_{p,p-h} & 0 & 0 & \dots & F_{p,p} \end{array} \right] \quad (12.27)$$

⁴costituito eventualmente anche da un solo compartimento

in cui i blocchi diagonali non nulli F_{ii} sono irriducibili, gli ultimi h blocchi diagonali $F_{p-h+1,p-h+1}, \dots, F_{p,p}$ hanno somme di colonna unitarie e quindi autovalore massimale unitario mentre gli altri blocchi diagonali hanno raggio spettrale minore di 1.

PROVA Se il sistema compartimentale possiede un pozzo, F è cogrediente a (12.26), in cui la sottomatrice F_{22} ha tutte le colonne a somma unitaria. Quindi sia F_{22} che F hanno autovalore massimale 1.

Viceversa, se $\Lambda(F)$ contiene l'autovalore 1, nella forma normale (11.20) di F almeno un blocco diagonale irriducibile $\bar{F}_{j,j}$ ha autovalore massimale unitario. Essendo F compartimentale, in $\bar{F}_{j,j}$ nessuna colonna può avere somma maggiore di 1 e di conseguenza tutte le colonne hanno somma unitaria. Altrimenti si potrebbero incrementare le colonne di $\bar{F}_{j,j}$ a somma minore di 1, fino ad ottenere una matrice irriducibile nella quale tutte le somme di colonna valgono 1 e, la proposizione 11.5.1 (v), l'autovalore dominante è maggiore di 1: un assurdo. Poiché il blocco $\bar{F}_{j,j}$ ha tutte le somme di colonna unitarie,

- i blocchi $\bar{F}_{i,j}$, per $i \neq j$ devono essere nulli (ovvero dai compartimenti relativi al blocco $\bar{F}_{j,j}$ non vi è accesso ai compartimenti degli altri blocchi);
- non vi sono perdite dai compartimenti del blocco $\bar{F}_{j,j}$.

Quindi i compartimenti del blocco $\bar{F}_{j,j}$ formano un pozzo.

Supponiamo ora che 1 sia autovalore di F , con molteplicità algebrica h .

(i) In ciascun blocco diagonale irriducibile della forma normale l'eventuale autovalore unitario ha molteplicità algebrica 1. Quindi nello spettro di F la molteplicità dell'autovalore $\lambda_0 = 1$ è h se e solo se nella forma normale sono presenti h blocchi diagonali irriducibili con raggio spettrale unitario. Per la precedente osservazione, nella forma normale ciascun blocco diagonale irriducibile $\bar{F}_{j,j}$ con raggio spettrale unitario ha somme di colonna tutte unitarie, quindi $\bar{F}_{i,j} = 0$, $i \neq j$, e i compartimenti relativi al blocco $\bar{F}_{j,j}$ formano un pozzo \mathcal{T}_j . Ciascuno dei pozzi \mathcal{T}_j è semplice, altrimenti permutando l'ordine dei suoi compartimenti la matrice $\bar{F}_{j,j}$ potrebbe essere ridotta per cogredienza alla forma (12.26), e ciò contrasta con l'ipotesi di irriducibilità.

(ii) e (iii) La struttura (12.27) si ottiene allora dalla forma normale permutando i blocchi colonna (e applicando le medesime permutazioni ai blocchi riga) in modo da avere nelle ultime posizioni i blocchi colonna che contengono le matrici irriducibili a raggio spettrale unitario. Sulla matrice così ottenuta

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_{11} & 0 \\ \mathcal{F}_{21} & \mathcal{F}_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cccc} \mathcal{F}_{11} & & & & 0 \\ \hline & F_{p-h+1,p-h+1} & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & F_{p-h+2,p-h+2} & & \\ \mathcal{F}_{21} & 0 & 0 & \ddots & \\ & 0 & 0 & \dots & F_{p,p} \end{array} \right]$$

è sufficiente ripristinare per cogredienza la forma normale del blocco \mathcal{F}_{11} operando sulle righe e sulle colonne che a tale blocco afferiscono⁵. ■

⁵l'operazione potrà indurre modifiche su \mathcal{F}_{21} , ma non su \mathcal{F}_{22} e $\mathcal{F}_{12} = 0$

Esempio 12.3.2 [CATENA DI COMPARTIMENTI] I compartimenti sono disposti secondo un ordinamento lineare, nel quale ciascuno ha scambi soltanto con i compartimenti immediatamente contigui. La struttura, nel caso $n = 4$, è schematizzata nella figura seguente

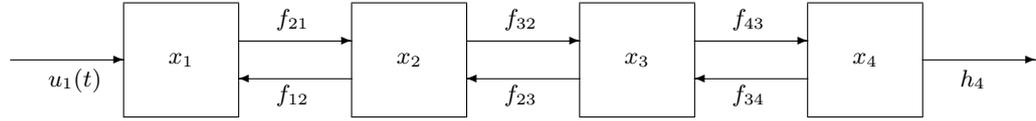


figura 12.3.2

in cui, semplicità, si suppone che l'uscita verso l'ambiente esterno interessi soltanto l'ultimo compartimento. L'aggiornamento di stato soddisfa l'equazione

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ x_4(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - f_{21} & f_{12} & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 - f_{12} - f_{32} & f_{23} & 0 \\ 0 & f_{32} & 1 - f_{23} - f_{43} & f_{34} \\ 0 & 0 & f_{43} & 1 - f_{34} - h_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1(t)$$

Esempio 12.3.2 [SISTEMA MAMMILLARE] Degli n compartimenti che costituiscono il sistema, $n - 1$ compartimenti "figli" non scambiano materia con altri compartimenti, ma soltanto con un compartimento centrale, detto compartimento "madre".

Ingressi e uscite possono riguardare in linea di principio tutti i compartimenti. Nell'esempio si suppone $n = 4$ e che l'uscita verso l'ambiente esterno riguardi soltanto il compartimento madre.

La matrice F che descrive l'aggiornamento in un passo del materiale accumulato in ciascuno dei compartimenti è data da

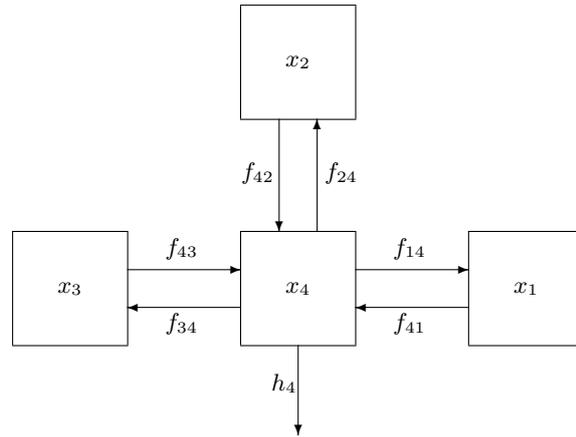


figura 12.3.3

$$F = \begin{bmatrix} 1 - f_{41} & 0 & 0 & f_{14} \\ 0 & 1 - f_{42} & 0 & f_{24} \\ 0 & 0 & 1 - f_{43} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & 1 - f_{14} - f_{24} - f_{34} - h_4 \end{bmatrix}$$

12.4 Raggiungibilità

Il vincolo che i valori dell'ingresso siano non negativi modifica in modo sostanziale la trattazione svolta nel capitolo quinto, per quanto riguarda la struttura degli insiemi raggiungibili, il tempo necessario per raggiungerli, la possibilità di controllare il sistema da uno stato raggiungibile ad un altro, etc. Strumento essenziale per approfondire lo studio di tali problemi è la teoria dei coni, della quale nell'Appendice B si riassumono alcuni lineamenti di rilievo per le applicazioni ai sistemi positivi.

Dato un sistema lineare discreto positivo

$$\mathbf{x}(t+1) = F\mathbf{x}(t) + G\mathbf{u}(t),$$

consideriamo l'insieme degli *stati raggiungibili (dallo stato $\mathbf{0}$) in k passi*. Per definizione di sistema positivo, gli ingressi sono vincolati ad assumere soltanto valori non negativi, quindi l'insieme raggiungibile in k passi è

$$C_k^R := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \sum_{\sigma=0}^{k-1} F^{k-1-\sigma} G \mathbf{u}(\sigma), \quad \mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(k-1) \geq \mathbf{0} \right\}. \quad (12.28)$$

Indicando con $\mathbf{u}_{[0,k]} \in \mathbb{R}_+^{km}$ il vettore $[\mathbf{u}(k-1)^T \quad \mathbf{u}(k-2)^T \quad \dots \quad \mathbf{u}(0)^T]^T$, si ha

$$C_k^R := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathcal{R}_k \mathbf{u}_{[0,k]}, \quad \mathbf{u}_{[0,k]} \in \mathbb{R}_+^{km} \right\},$$

quindi l'insieme degli stati raggiungibili in k passi coincide con quello delle combinazioni lineari a coefficienti non negativi delle colonne (tutte non negative) della matrice di raggiungibilità in k passi

$$\mathcal{R}_k = [G \quad FG \quad F^2G \quad \dots \quad F^{k-1}G].$$

C_k^R , in quanto cono positivo avente come insieme finito di generatori le colonne della matrice \mathcal{R}_k , è convesso, poliedrico e chiuso.

- **ESERCIZIO 12.4.1** Se gli ingressi non negativi $\mathbf{u}_{[0,k]}$ e $\bar{\mathbf{u}}_{[0,k]}$ consentono di raggiungere rispettivamente \mathbf{x} e $\bar{\mathbf{x}}$ in C_k^R , per ogni $\alpha \in [0, 1]$ l'ingresso non negativo $\alpha \mathbf{u}_{[0,k]} + (1-\alpha)\bar{\mathbf{u}}_{[0,k]}$ consente di raggiungere $\alpha \mathbf{x} + (1-\alpha)\bar{\mathbf{x}}$.

Proposizione 12.3.1 *In un sistema positivo, l'insieme C_k^R degli stati raggiungibili in k passi è un cono positivo convesso chiuso e poliedrico, detto “cono di raggiungibilità in k passi”.* ■

12.4.1 Coni di raggiungibilità in k passi

Il comportamento dei coni di raggiungibilità al crescere di k è per alcuni aspetti, ma non per tutti, analogo a quello dei sottospazi di raggiungibilità nel caso lineare standard, senza vincoli sull'ingresso. Si ha infatti

Proposizione 12.4.2 [CATENE DI CONI DI RAGGIUNGIBILITÀ] *In un sistema lineare discreto positivo*

- i) *i coni di raggiungibilità soddisfano la catena di inclusioni*

$$C_1^R \subseteq C_2^R \subseteq \dots \subseteq C_k^R \subseteq C_{k+1}^R \subseteq \dots \quad (12.29)$$

e le inclusioni possono essere strette per ogni $k \in \mathbb{N}$;

- ii) *se $C_k^R = C_{k+1}^R$, allora $C_{k+1}^R = C_{k+2}^R$, ovvero, se la catena (12.29) è stazionaria in un punto, essa lo è indefinitamente da quel punto in avanti;*
- iii) *se $\mathbf{x} \in C_k^R$ allora, fra i vettori di ingresso $\mathbf{u}_{[0,k]} \in \mathbb{R}_+^{km}$ che consentono di raggiungere \mathbf{x} in k passi, ne esiste almeno uno che ha non più di n componenti positive.*

PROVA i) L'inclusione $C_k^R \subseteq C_{k+1}^R$ è ovvia: se l'ingresso non negativo $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(k-1)$ controlla il sistema da $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ a $\mathbf{x}(k) = \bar{\mathbf{x}}$, l'ingresso

$$\mathbf{v}(0), \mathbf{v}(1), \dots, \mathbf{v}(k), \quad \text{con } \mathbf{v}(0) = \mathbf{0}, \mathbf{v}(1) = \mathbf{u}(0), \mathbf{v}(2) = \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{v}(k) = \mathbf{u}(k-1)$$

controlla il sistema da $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ a $\mathbf{x}(k+1) = \bar{\mathbf{x}}$. Per quanto riguarda la possibilità che tutte le inclusioni della catena siano proprie, si rinvia ad uno degli esempi che seguono.

ii) Si procede come per il caso senza vincoli di segno sull'ingresso. Se $\bar{\mathbf{x}} \in C_{k+2}^R$, esiste un ingresso non negativo

$$\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(k+1) \quad (12.30)$$

che controlla il sistema da $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ a $\mathbf{x}(k+2) = \bar{\mathbf{x}}$. Lo stato raggiunto all'istante $k+1$ per effetto dell'ingresso (12.30), cioè $\tilde{\mathbf{x}} = \sum_{\sigma=0}^k F^{k-\sigma} G \mathbf{u}(\sigma)$, è un elemento di C_{k+1}^R . Essendo $C_{k+1}^R = C_k^R$, lo stato $\tilde{\mathbf{x}}$ è raggiungibile anche all'istante k , applicando un opportuno ingresso non negativo $\mathbf{v}(0), \mathbf{v}(1), \dots, \mathbf{v}(k-1)$.

Allora l'ingresso non negativo

$$\mathbf{v}(0), \mathbf{v}(1), \dots, \mathbf{v}(k-1), \mathbf{v}(k) \quad \text{con } \mathbf{v}(k) = \mathbf{u}(k+1)$$

controlla il sistema da $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ a $\mathbf{x}(k+1) = \bar{\mathbf{x}}$, quindi $\bar{\mathbf{x}} \in C_{k+1}^R$.

iii) è conseguenza diretta del teorema di Caratheodory (B.1.2): \mathbf{x} appartiene al cono generato dalle colonne della matrice \mathcal{R}_k , quindi è esprimibile come combinazione lineare a coefficienti positivi di colonne linearmente indipendenti di \mathcal{R}_k , quindi di n colonne al più. L'ingresso, i cui valori forniscono i combinatori delle colonne, include allora al più n componenti positive. Si noti che, al variare di \mathbf{x} in C_k^R , variano in generale gli indici delle (al più n) componenti non nulle dell'ingresso che permette di raggiungere \mathbf{x} in k passi. ■

Esempio 12.4.1 [REAZIONE CHIMICA REVERSIBILE] Si vuole modellare mediante un sistema a tempo discreto una reazione chimica reversibile nella quale intervengono due specie chimiche S_1 ed S_2 . Nell'unità di tempo si ipotizza che

- la massa della specie S_1 presente al tempo t , $x_1(t)$, si trasformi parzialmente, secondo un coefficiente di ripartizione k_1 con $0 < k_1 < 1$, in $k_1 x_1(t)$ unità di massa della specie S_2 , mentre le restanti $(1 - k_1)x_1(t)$ unità di massa non subiscono trasformazione;
- la massa $x_2(t)$ della specie S_2 si trasformi parzialmente, secondo un coefficiente di ripartizione k_2 con $0 < k_2 < 1$, in $k_2 x_2(t)$ unità di massa della specie S_1 , mentre le restanti $(1 - k_2)x_2(t)$ unità di massa non subiscono trasformazione;
- il sistema venga alimentato da una massa totale $u(t) \geq 0$, della quale $pu(t)$ unità di massa appartengono alla specie S_1 e $(1 - p)u(t)$ alla specie S_2 . Ovviamente $0 \leq p \leq 1$.

Si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= (1 - k_1)x_1(t) + k_2 x_2(t) + pu(t) \\ x_2(t+1) &= k_1 x_1(t) + (1 - k_2)x_2(t) + (1 - p)u(t) \end{aligned} \quad (12.31)$$

ovvero, ponendo $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \begin{bmatrix} 1-k_1 & k_2 \\ k_1 & 1-k_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} u(t) \\ &= F\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \end{aligned} \quad (12.32)$$

in cui la matrice F è strettamente positiva. Il suo autovalore dominante λ_0 vale 1 (le colonne hanno entrambe somma unitaria) e l'autovettore corrispondente $\mathbf{v}_0 = [v_{01} \ v_{02}]^T$ si determina cercando un vettore positivo nel nucleo della matrice $(F - I_2)$.

Risolvendo l'equazione

$$\begin{bmatrix} -k_1 & k_2 \\ k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{01} \\ v_{02} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

si ottiene, a meno di una costante moltiplicativa,

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} v_{01} \\ v_{02} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} k_2 \\ k_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{k_2}{k_1+k_2} \\ \frac{k_1}{k_1+k_2} \end{bmatrix}. \quad (12.33)$$

Il secondo autovalore è $\lambda_1 = 1 - k_1 - k_2$, appartenente all'intervallo aperto $(-1, 1)$, e l'autovettore corrispondente ha componenti opposte:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

In assenza di ingresso, la ripartizione della massa totale fra le due specie S_1 e S_2 diventa asintoticamente proporzionale alle componenti v_{01} e v_{02} di \mathbf{v}_0 ; poichè nell'ultimo vettore di (12.33) la somma delle componenti è unitaria, queste forniscono, per $t \rightarrow +\infty$, la proporzione secondo cui si ripartiranno le masse delle due specie rispetto alla massa totale.

La matrice di raggiungibilità del sistema

$$\mathcal{R} = [\mathbf{g} \ F\mathbf{g}] = \begin{bmatrix} p & (1-k_1)p + k_2(1-p) \\ 1-p & k_1p + (1-k_2)(1-p) \end{bmatrix}$$

non ha rango pieno se e solo se le due colonne sono proporzionali, i.e. se il vettore $\mathbf{g} > 0$ è un autovettore della matrice F . Poichè una matrice strettamente positiva ha come unico autovettore positivo quello dominante, il sistema non sarà raggiungibile (come sistema lineare standard, senza vincoli sul segno dell'ingresso) se e solo se il vettore \mathbf{g} , che fornisce la ripartizione fra le due specie presenti nell'ingresso, soddisfa la condizione

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_2}{k_1+k_2} \\ \frac{k_1}{k_1+k_2} \end{bmatrix}. \quad (12.34)$$

Il risultato è piuttosto ovvio: partendo da uno stato che sia autovettore di F , in assenza di ingresso non mutano nel tempo le proporzioni fra le specie S_1 e S_2 , ma non mutano neppure se un ingresso non nullo inietta ad ogni istante nel sistema le due specie secondo le proporzioni presenti nell'autovettore. La condizione $\text{rank } \mathcal{R} = 2$, d'altra parte, implica la raggiungibilità di ogni vettore di \mathbb{R}^2 nelle situazioni in cui si possano utilizzare campioni di ingresso senza vincoli di segno, e quindi anche ingressi di segno negativo. Nel sistema positivo in considerazione si deve supporre invece che $u(t)$ sia non negativo per ogni t e ciò comporta che si possano raggiungere soltanto sottoinsiemi di \mathbb{R}_+^2 aventi struttura di cono convesso. Per determinare i coni di raggiungibilità C_k^R al crescere di k dobbiamo allora studiare la sequenza di generatori $\mathbf{g}, F\mathbf{g}, F^2\mathbf{g}, \dots$

Concludendo, se il vettore positivo \mathbf{g} è autovettore dominante, vale la (12.34) e il cono di raggiungibilità C_k^R coincide per ogni k con la sola semiretta di \mathbb{R}_+^2 passante per l'origine e parallela a \mathbf{g} .

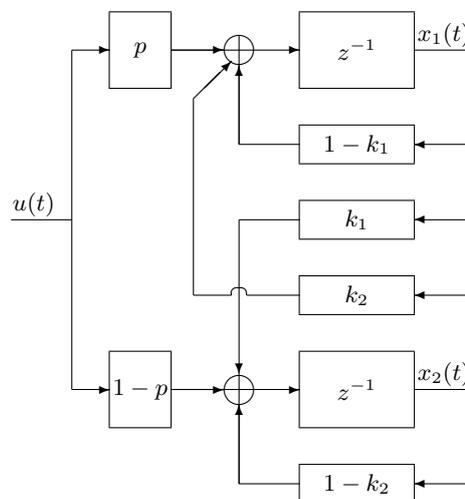


figura 12.4.1

Se non è autovettore dominante, conviene rappresentarlo sulla base di Jordan

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} = \gamma_0 \mathbf{v}_0 + \gamma_1 \mathbf{v}_1 = \gamma_0 \begin{bmatrix} \frac{k_2}{k_1+k_2} \\ \frac{k_1}{k_1+k_2} \end{bmatrix} + \gamma_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_2}{k_1+k_2} \\ \frac{k_1}{k_1+k_2} \end{bmatrix} + \left(p - \frac{k_2}{k_1+k_2}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

La verifica che $\gamma_0 = 1$ e $\gamma_1 = p - \frac{k_2}{k_1+k_2}$ è immediata, premoltiplicando \mathbf{g} per gli autovettori sinistri $\mathbf{w}_0^T = [1 \ 1]$ e $\mathbf{w}_1^T = [k_1 \ -k_2]$.

I successivi generatori $\mathbf{g}, F\mathbf{g}, F^2\mathbf{g}, \dots$ del cono di raggiungibilità sono esprimibili allora nella forma

$$F^\nu \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{k_2}{k_1+k_2} \\ \frac{k_1}{k_1+k_2} \end{bmatrix} + \left(p - \frac{k_2}{k_1+k_2}\right) \lambda_1^\nu \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (12.35)$$

Al divergere di ν , essi tendono ad allinearsi con l'autovettore dominante \mathbf{v}_0 e il cono di raggiungibilità in k passi C_k^R non "invade" il quadrante \mathbb{R}_+^2 , nemmeno asintoticamente per $k \rightarrow +\infty$.

Nella Figura 12.4.2 sono riportate varie situazioni che possono verificarsi: se il secondo autovalore λ_1 è positivo, la successione dei coni di raggiungibilità C_k^R è strettamente crescente qualunque sia k , se è negativo si ha $C_2^R = C_3^R$ e la successione diventa stazionaria dopo il secondo passo. Cosa succede se $\lambda_1 = 0$?

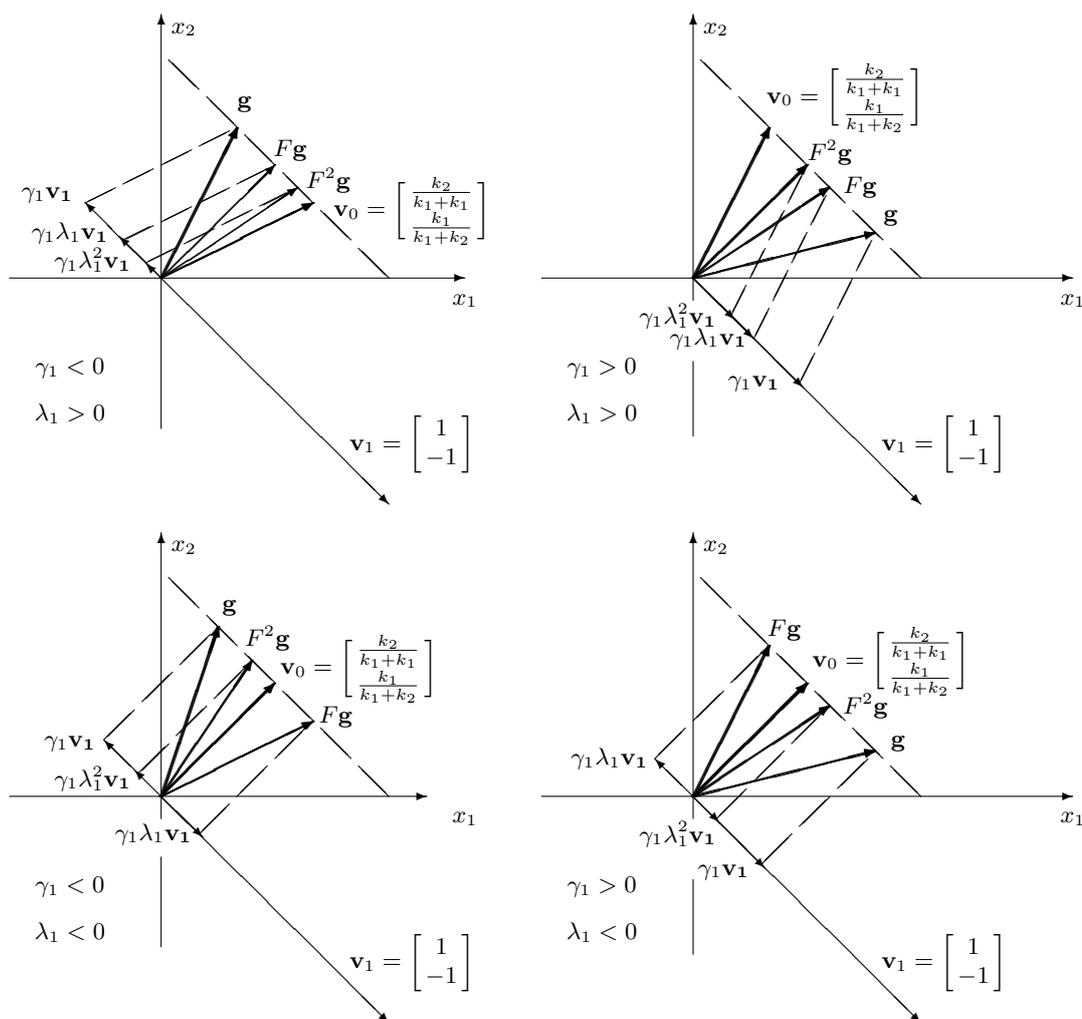


Figura 12.4.2

Esempio 12.4.2 [ASSORBIMENTO DI UN FARMACO] Il modello ipotizza che al tempo t

- venga introdotta nell'intestino una quantità di farmaco $u(t)$, che va ad aggiungersi alla quantità già accumulata e pari a $x_1(t)$;
- nell'unità di tempo una parte del farmaco proporzionale ad $x_1(t)$ lasci l'intestino e transiti nel plasma dove si aggiunge alla quantità già presente, pari a $x_2(t)$;
- nell'unità di tempo venga eliminata dal plasma una quota del farmaco accumulato, pari a $r_0 x_2(t)$.

Si suppone inoltre che valgano le disuguaglianze $0 < r_0 < r_1 < 1$.

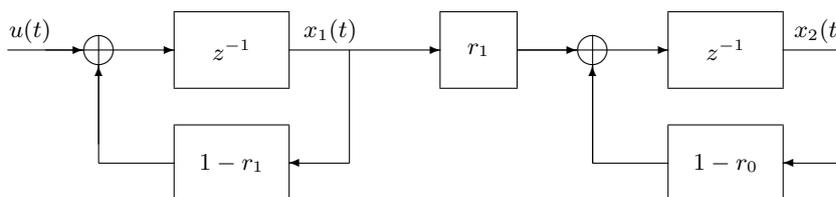


Figura 12.4.3

Le equazioni del modello

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= (1-r_1)x_1(t) + u(t) \\ x_2(t+1) &= r_1x_1(t) + (1-r_0)x_2(t), \end{aligned}$$

ovvero

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 1-r_1 & 0 \\ r_1 & 1-r_0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = F\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t), \quad (12.36)$$

descrivono come varia nel tempo il vettore $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, le cui componenti rappresentano le quantità di farmaco presenti nell'intestino e nel plasma al tempo t . La matrice F è riducibile ed ha autovalore massimale $\lambda_0 = 1 - r_0$, al quale corrisponde un autovettore $\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Anche l'altro autovalore, $\lambda_1 = 1 - r_1$, è positivo e ad esso corrisponde un autovettore $\mathbf{v}_1 \sim \begin{bmatrix} r_1 - r_0 \\ -r_1 \end{bmatrix}$ con componenti di segno opposto. Il vettore \mathbf{g} ha una componente positiva $r_1/(r_1 - r_0)$ su \mathbf{v}_0 e $F^k \mathbf{g}$ al divergere di k si allinea con \mathbf{v}_0 :

$$\begin{aligned} & [\mathbf{g} \quad F\mathbf{g} \quad \dots \quad F^k \mathbf{g} \quad \dots] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^k & \dots \\ 0 & 1-\lambda_1 & \dots & (1-\lambda_1)\lambda_1^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^i & \dots \end{bmatrix} \mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^k & \dots \\ 0 & 1-\lambda_1 & \dots & (1-\lambda_1)\lambda_1^{k-1} \frac{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^k - 1}{\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - 1} & \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

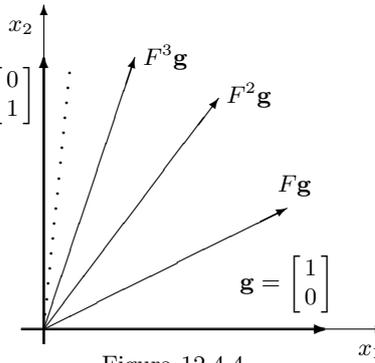


Figura 12.4.4

I coni di raggiungibilità C_k^R sono gli angoli compresi fra l'asse x_1 , supporto del vettore \mathbf{g} , e la semiretta di supporto del vettore $F^k \mathbf{g}$. Al crescere di k essi costituiscono una successione strettamente crescente e la loro unione copre tutto il quadrante positivo, ad eccezione dei punti a coordinata positiva dell'asse x_2 .

12.4.2 Solidità e stazionarietà dei coni di raggiungibilità in k passi

È chiaro che il sottospazio di raggiungibilità in k passi X_k^R di un generico sistema lineare n -dimensionale $\Sigma = (F, G)$ contiene una sfera di \mathbb{R}^n soltanto se Σ è completamente raggiungibile in k passi, ossia se $X_k^R = \mathbb{R}^n$. Viceversa, se X_k^R contiene una sfera di \mathbb{R}^n , allora $X_k^R = \mathbb{R}^n$ e il sistema Σ è completamente raggiungibile in k passi.

Se Σ è un sistema positivo, il cono di raggiungibilità in k passi C_k^R è l'insieme degli stati raggiungibili (da $\mathbf{0}$) quando si applichino ingressi non negativi, quindi è un sottoinsieme proprio (salvo che per $G = 0$) di X_k^R , insieme degli stati raggiungibili quando sui valori di ingresso non si impongano vincoli di segno. È pertanto evidente che, se C_k^R contiene una sfera di \mathbb{R}^n , la contiene anche X_k^R e in tal caso Σ , interpretato come sistema lineare generico, è raggiungibile in k passi. La proposizione 12.4.5 dimostra che vale anche il contrario, nel senso che, se F e G sono matrici non negative e Σ è raggiungibile in k passi per effetto di ingressi senza vincolo di segno, allora ricorrendo soltanto a ingressi non negativi si può raggiungere in k passi una sfera di \mathbb{R}^n .

Definizione 12.4.4 [CONO SOLIDO] *Un cono di \mathbb{R}^n si dice “solido” se contiene qualche sfera di \mathbb{R}^n (o, equivalentemente, qualche aperto di \mathbb{R}^n).*

Proposizione 12.4.5 [CONDIZIONI PER LA SOLIDITÀ DI C_k^R] *Il cono di raggiungibilità C_k^R del sistema positivo $\Sigma = (F, G)$ di dimensione n è solido se e solo se ha rango n la matrice di raggiungibilità in k passi \mathcal{R}_k .*

Conseguentemente, il sistema è raggiungibile senza vincoli sul segno degli ingressi, ovvero $X^R = \mathbb{R}^n$, se e solo se è solido il cono di raggiungibilità in n passi C_n^R , e quindi ogni cono C_k^R , $k \geq n$.

PROVA Supponiamo che C_k^R sia solido. Esso contiene tutti i vettori di una sfera di raggio $r > 0$

$$S(\bar{\mathbf{x}}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| < r\},$$

quindi, per ogni $\epsilon \in (-r, r)$, i vettori $\bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{e}_1, \bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{e}_2, \dots, \bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{e}_n$. La matrice formata dalle colonne di tali vettori

$$[\bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{e}_1 \quad \bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{e}_n] = \bar{\mathbf{x}} \mathbf{1}^T + \epsilon I_n$$

può essere singolare soltanto quando $-\epsilon$ è autovalore di $\bar{\mathbf{x}} \mathbf{1}^T$, quindi solo per un numero finito di valori di ϵ . Di conseguenza la sfera $S(\bar{\mathbf{x}}, r)$, il cono C_k^R che la contiene e il sottospazio $X_k^R = \text{im}[G \quad FG \quad \dots \quad F^{k-1}G]$ che contiene C_k^R includono n -uple di vettori indipendenti, la matrice \mathcal{R}_k ha rango n e il sistema è raggiungibile in k passi.

Supponiamo viceversa che \mathcal{R}_k abbia rango n e consideriamo

- un ingresso strettamente positivo e costante su k passi $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}(1) = \dots = \mathbf{u}(k-1) = \bar{\mathbf{u}} \gg \mathbf{0}$ e lo stato raggiunto⁶ per effetto della sua applicazione

$$\bar{\mathbf{x}} := \mathbf{x}(k) = \sum_{\sigma=0}^{k-1} F^{k-1-\sigma} G \bar{\mathbf{u}} \gg \mathbf{0}$$

⁶ $\bar{\mathbf{x}}$ è strettamente positivo, altrimenti \mathcal{R}_k dovrebbe contenere una riga nulla.

- per ogni vettore \mathbf{e}_i della base canonica, un ingresso (in generale con componenti sia positive che negative) $\mathbf{u}^{(i)}(0), \mathbf{u}^{(i)}(1), \dots, \mathbf{u}^{(i)}(k-1)$ che in k passi controlli il sistema nello stato \mathbf{e}_i :

$$\mathbf{e}_i = \sum_{\sigma=0}^{k-1} F^{k-1-\sigma} G \mathbf{u}^{(i)}(\sigma)$$

È chiaro che, se $\mu > 0$ è un numero reale abbastanza piccolo, si avrà

$$\bar{\mathbf{u}} \pm \mu \mathbf{u}^{(i)}(\sigma) \gg \mathbf{0}, \forall \sigma \in \{0, 1, \dots, k-1\}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Quindi, qualunque siano i valori della n -upla $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ con $\epsilon_i \in (-\frac{\mu}{n}, \frac{\mu}{n})$, l'ingresso

$$\mathbf{u}(\sigma) = \bar{\mathbf{u}} + \epsilon_1 \mathbf{u}^{(1)}(\sigma) + \epsilon_2 \mathbf{u}^{(2)}(\sigma) + \dots + \epsilon_n \mathbf{u}^{(n)}(\sigma) \quad \sigma = 0, 1, \dots, k-1 \quad (12.37)$$

risulterà positivo. Applicando il principio di sovrapposizione, si vede che l'ingresso positivo (12.37) controlla il sistema nello stato

$$\mathbf{x}(k) = \bar{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^n \epsilon_i \mathbf{e}_i \in C_k^R,$$

e che di conseguenza appartengono al cono C_k^R tutti gli stati dell'ipercubo

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^n \epsilon_i \mathbf{e}_i, |\epsilon_i| < \mu/n\}$$

e, a fortiori, quelli della sfera $S(\bar{\mathbf{x}}, \mu/n)$, che è contenuta nell'ipercubo ⁷.

La seconda parte del teorema è ovvia quando si ricordi che, se un sistema è raggiungibile (senza vincoli di segno sull'ingresso), lo è sempre in al più n passi. ■

Mentre per un sistema lineare senza vincoli di segno sull'ingresso la possibilità di raggiungere in k passi tutti i punti di una sfera di \mathbb{R}^n implica

$$X_k^R = \mathbb{R}^n = X_{k+1}^R,$$

per un sistema positivo la possibilità di raggiungere in k passi con ingressi non negativi tutti i punti di una sfera di \mathbb{R}_+^n non implica che gli stati raggiungibili in k e in $k+1$ siano gli stessi, ossia l'inclusione

$$C_k^R \subseteq C_{k+1}^R$$

non si riduce necessariamente a un'eguaglianza. La solidità del cono raggiungibile in k passi non implica quindi la sua stazionarietà: ingressi non negativi di durata più lunga possono consentire, in generale, di raggiungere ulteriori stati di \mathbb{R}_+^n .

La proposizione che segue illustra quali condizioni garantiscano la stazionarietà del cono di raggiungibilità nel caso di sistemi positivi con un ingresso.

Proposizione 12.4.6 [SISTEMI CON UN INGRESSO: SOLIDITÀ E STAZIONARIETÀ DI C_n^R]
Sia (F, \mathbf{g}) un sistema lineare positivo, con un solo ingresso, completamente raggiungibile in assenza di vincoli di segno sull'ingresso.

⁷ \mathcal{H} contiene tutti i vettori \mathbf{x} per i quali le componenti $(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})_i$ soddisfano $|(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})_i| < \mu/n$, condizioni che sono soddisfatte dalle componenti dei vettori della sfera $S(\bar{\mathbf{x}}, \mu/n)$.

- i) Il cono C_k^R è solido per $k \geq n$, ma non per $k < n$.
 ii) Si ha $C_n^R = C_{n+1}^R$ se e solo se nel polinomio caratteristico

$$\Delta_F(z) = \det(zI_n - F) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_{n-1} z^{n-1} + z^n$$

sono non positivi i coefficienti α_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$.

PROVA Un sistema lineare (senza vincoli di segno) è raggiungibile con un ingresso se lo è in n passi, e non può esserlo in meno di n passi. Dalla proposizione precedente segue allora il punto (i).

Per il secondo punto, se assumiamo che tutti i coefficienti α_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$ siano non positivi, dal teorema di Cayley-Hamilton segue che il vettore

$$F^n \mathbf{g} = -\alpha_0 \mathbf{g} - \alpha_1 F \mathbf{g} - \dots - \alpha_{n-1} F^{n-1} \mathbf{g} \quad (12.38)$$

è combinazione a coefficienti non negativi dei vettori $\mathbf{g}, F \mathbf{g}, \dots, F^{n-1} \mathbf{g}$ che generano il cono C_n^R , quindi appartiene al cono medesimo. Pertanto $C_{n+1}^R = C_n^R$.

Viceversa, se vale l'eguaglianza $C_n^R = C_{n+1}^R$, allora il vettore $F^n \mathbf{g}$, che appartiene al cono C_{n+1}^R , deve appartenere a C_n^R ossia deve essere esprimibile come combinazione a coefficienti non negativi delle sue colonne generatrici $\mathbf{g}, F \mathbf{g}, \dots, F^{n-1} \mathbf{g}$:

$$F^n \mathbf{g} = \beta_0 \mathbf{g} + \beta_1 F \mathbf{g} + \dots + \beta_{n-1} F^{n-1} \mathbf{g}, \quad \beta_i \geq 0 \quad (12.39)$$

Poichè le colonne $\mathbf{g}, F \mathbf{g}, \dots, F^{n-1} \mathbf{g}$ sono una base per lo spazio \mathbb{R}^n , è unica la loro combinazione lineare che esprime il vettore $F^n \mathbf{g}$ e, confrontando (12.38) con (12.39) si conclude che i coefficienti α_i del polinomio caratteristico sono non positivi. ■

Esempio 12.4.1 (Continuazione) Il polinomio caratteristico del sistema (12.31) è

$$\Delta_F(z) = z^2 + (k_1 + k_2 - 2)z + (1 - k_1 - k_2) = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0.$$

Essendo $0 < k_1, k_2 < 1$, il coefficiente α_1 è comunque negativo, mentre il coefficiente α_0 , che coincide con l'autovalore non massimale λ_1 , è non positivo se $k_1 + k_2 \geq 1$.

Se $\lambda_1 < 0$, si ritrova il risultato illustrato negli ultimi due diagrammi di figura 12.4.2: il cono di raggiungibilità in due passi contiene $F^2 \mathbf{g}, F^3 \mathbf{g}, \dots$, ovvero la catena dei coni di raggiungibilità in due passi diventa stazionaria. Se $\lambda_1 = 0$ si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \mathbf{v}_0 + \gamma_1 \mathbf{v}_1 \\ F \mathbf{g} &= F \mathbf{v}_0 + \gamma_1 F \mathbf{v}_1 = \lambda_0 \mathbf{v}_0 + \gamma_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 \\ F^i \mathbf{g} &= \mathbf{v}_0, \quad \forall i > 1 \end{aligned}$$

e quindi ancora in due passi la catena dei coni di raggiungibilità diventa stazionaria.

12.4.3 Il cono di raggiungibilità C^R

L'insieme degli stati che possono essere raggiunti a partire dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ applicando un ingresso non negativo di durata arbitraria coincide con l'unione di tutti coni di raggiungibilità in k passi al variare di k :

$$C^R = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k^R = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : \mathbf{x} = \sum_{\sigma=0}^{k-1} F^{k-1-\sigma} G \mathbf{u}(\sigma), \exists k > 0, \exists \mathbf{u}_{[0,k]} \geq \mathbf{0} \right\} \quad (12.40)$$

Anch'esso possiede la struttura di cono convesso, ed è detto "cono di raggiungibilità". A differenza dei coni C_k^R , il cono C^R

- (a) è F -invariante: se $\mathbf{x} \in C^R$, allora $\mathbf{x} \in C_k^R$ per qualche k , quindi $F\mathbf{x} \in C_{k+1}^R \subseteq C^R$;
- (b) può non essere poliedrico (i.e. può richiedere per la sua generazione infiniti generatori);
- (c) può non essere un insieme chiuso.

Uno stato $\bar{\mathbf{x}}$ che non appartiene a C^R ma alla sua frontiera, e quindi alla chiusura $\overline{C^R}$ del cono di raggiungibilità, è detto "essenzialmente raggiungibile", nel senso che esiste in C^R una successione di stati $\mathbf{x}^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots$ che converge a $\bar{\mathbf{x}}$ e quindi esistono ingressi non negativi che consentono di raggiungere stati arbitrariamente prossimi allo stato $\bar{\mathbf{x}}$.

Si noti che se $\bar{\mathbf{x}}$ è essenzialmente raggiungibile, non è necessariamente vero che esso rappresenti il punto limite di una traiettoria del sistema. In altre parole, si dà il caso (si veda l'Esercizio 12.4.1) in cui, per ogni ingresso $\{\mathbf{u}(t)\}_{t \in \mathbb{N}}$, né la successione $\{\mathbf{x}(t)\}_{t \in \mathbb{N}}$ degli stati raggiunti, $\mathbf{x}(t) = \sum_{\sigma=0}^{t-1} F^{t-\sigma-1} G \mathbf{u}(\sigma)$, né una almeno delle sue sottosuccessioni convergono a $\bar{\mathbf{x}}$ al divergere di t .

- ESERCIZIO 12.4.2 [GLI STATI ESSENZIALMENTE RAGGIUNGIBILI SONO RAGGIUNGIBILI ASINTOTICAMENTE?] Si consideri il sistema positivo

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = F\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t), \quad \gamma > 0, \quad \delta > \alpha > 1.$$

- (i) Per ogni k non negativo si ha

$$F^k \mathbf{g} = \alpha^k \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\gamma}{\delta - \alpha} \left[\left(\frac{\delta}{\alpha} \right)^k - 1 \right] \end{bmatrix},$$

quindi i coni di raggiungibilità C_k^R formano una successione strettamente crescente di insiemi, la cui unione C^R è $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{[0 \ x_2]^T, x_2 > 0\}$, ovvero il quadrante positivo privato del semiasse positivo delle ordinate (si veda anche l'esempio 12.4.2).

- (ii) Ogni stato $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$, con $\bar{x}_2 > 0$, è essenzialmente raggiungibile.

(iii) Non esiste alcuna successione di ingressi non negativi $u(0), u(1), \dots$ tale che la corrispondente successione $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \dots$ degli stati in evoluzione forzata $\mathbf{x}(t) = \sum_{\sigma=0}^{t-1} F^{t-1-\sigma} \mathbf{g}u(\sigma)$ soddisfi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}. \quad (12.41)$$

- (iv) La (12.41) non è soddisfatta nemmeno se si considera una sottosuccessione di $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots$

‡ Suggestione per (iii) e (iv). Per ogni $t > 0$ la prima componente dello stato soddisfa $x_1(t) = \sum_{\sigma=0}^{t-1} \alpha^{t-1-\sigma} u(\sigma) \geq \sum_{\sigma=0}^{t-1} u(\sigma)$.

Dato un sistema positivo non omogeneo

$$\mathbf{x}(t+1) = F\mathbf{x}(t) + G\bar{\mathbf{u}} \quad (12.42)$$

con $|\Lambda(F)| < 1$, lo stato di equilibrio \mathbf{x}_e corrispondente all'ingresso positivo costante $\bar{\mathbf{u}}$ soddisfa

$$\mathbf{x}_e = (I - F)^{-1} G\bar{\mathbf{u}} = G\bar{\mathbf{u}} + FG\bar{\mathbf{u}} + F^2G\bar{\mathbf{u}} + \dots, \quad (12.43)$$

quindi è limite, al divergere di k , della successione di stati raggiungibili positivamente $\sum_{\sigma=0}^k F^\sigma G\bar{\mathbf{u}}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, ovvero è un elemento di $\overline{C^R}$.

Nella seguente proposizione, verificheremo che \mathbf{x}_e è positivamente raggiungibile da $\mathbf{0}$ non

soltanto in termini asintotici, ma in un numero finito di passi, e quindi appartiene a qualche cono di raggiungibilità in k passi.

Proposizione 12.4.7 *Sia $\mathbf{x}_e \geq \mathbf{0}$ lo stato di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$ del sistema positivo non omogeneo (12.42), con $|\Lambda(F)| < 1$. Allora \mathbf{x}_e appartiene al cono di raggiungibilità in k passi C_k^R , per qualche $k \geq 1$.*

PROVA Per ogni $k \geq 0$, da (12.43) segue che \mathbf{x}_e soddisfa l'identità

$$\mathbf{x}_e = G\bar{\mathbf{u}} + FG\bar{\mathbf{u}} + \dots + F^{k-1}G\bar{\mathbf{u}} + F^k\mathbf{x}_e. \quad (12.44)$$

D'altra parte X^R , il sottospazio raggiungibile del sistema lineare standard (F, G) , è un insieme chiuso⁸ e per (12.43) \mathbf{x}_e è il limite di una successione di suoi elementi. Quindi $\mathbf{x}_e \in X^R$ e, poichè X^R è F -invariante, $F^k\mathbf{x}_e$ è elemento di X^R qualunque sia $k \geq 0$.

Sia \mathcal{C} il compatto costituito dall'intersezione fra il sottospazio X^R e la sfera unitaria,

$$\mathcal{C} := X^R \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\} = X_n^R \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\},$$

e sia $M > 0$ una costante tale che, per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, esista in corrispondenza un ingresso (senza vincoli di segno) $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(n-1)$ che

- consente di raggiungere \mathbf{x} in n passi,
- soddisfa $\|\mathbf{u}(\sigma)\| \leq M$, $\sigma = 0, 1, \dots, n-1$.

Se $\bar{\mathbf{u}} = [\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \dots \ \bar{u}_m]^T$ è strettamente positivo e $\bar{\beta} > 0$ è una costante positiva tale che $\bar{u}_i \geq \bar{\beta}$, $i = 1, 2, \dots, m$, tenuto conto che $F^k\mathbf{x}_e$ è infinitesimo al divergere di k possiamo scegliere in (12.44) un intero $k \geq n$, abbastanza grande da soddisfare la disequaglianza

$$\|F^k\mathbf{x}_e\| < \min\left\{\frac{\bar{\beta}}{M}, 1\right\}.$$

Da quanto precede, esiste un ingresso $\tilde{\mathbf{u}}(0), \tilde{\mathbf{u}}(1), \dots, \tilde{\mathbf{u}}(k-1)$ che porta in k passi dallo stato $\mathbf{0}$ nello stato $F^k\mathbf{x}_e$ e soddisfa la condizione

$$\|\tilde{\mathbf{u}}(\sigma)\| \leq M\frac{\bar{\beta}}{M} = \bar{\beta}, \quad 0 \leq \sigma \leq k-1.$$

Allora l'ingresso $\mathbf{u}(\sigma) = \bar{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}(\sigma)$, $\sigma = 0, 1, \dots, k-1$, è non negativo e consente di raggiungere all'istante k lo stato

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= G\bar{\mathbf{u}} + FG\bar{\mathbf{u}} + \dots + F^{k-1}G\bar{\mathbf{u}} + G\tilde{\mathbf{u}}(k-1) + FG\tilde{\mathbf{u}}(k-2) + \dots + F^{k-1}G\tilde{\mathbf{u}}(0) \\ &= G\bar{\mathbf{u}} + FG\bar{\mathbf{u}} + \dots + F^{k-1}G\bar{\mathbf{u}} + F^k\mathbf{x}_e \\ &= \mathbf{x}_e \end{aligned} \quad (12.45)$$

Se alcune componenti \bar{u}_i del vettore $\bar{\mathbf{u}}$ sono nulle, sarà sufficiente modificare la matrice G sopprimendovi le colonne corrispondenti agli indici di tali componenti. ■

⁸ogni sottospazio di dimensione finita di uno spazio vettoriale è un insieme chiuso: quindi contiene il limite di ogni successione convergente di punti appartenenti al sottospazio.

- ESERCIZIO 12.4.3 In un sistema lineare discreto (F, G) gli stati dell'intersezione fra X_k^R e la sfera $S(\mathbf{0}, 1)$ sono raggiungibili con ingressi di durata k , uniformemente limitati in norma da una opportuna costante positiva M . In altre parole, esiste $M > 0$ tale che, se $\bar{\mathbf{x}} \in X_k^R \cap S(\mathbf{0}, 1)$ allora $\bar{\mathbf{x}} = \sum_{\sigma=0}^{k-1} F^{k-1-\sigma} G \mathbf{u}(\sigma)$ con $\|\mathbf{u}(\sigma)\| \leq M$, $\sigma = 0, 1, \dots, k-1$.

‡ Suggestione: Sia $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ una base ortonormale per X_k^R e siano $\mathbf{u}^{(i)}(\sigma)$, $i = 1, 2, \dots, r$ ingressi che consentono di raggiungere gli stati \mathbf{v}_i all'istante k .

Ogni stato di $X_k^R \cap S(\mathbf{0}, 1)$ è una combinazione $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_r \mathbf{v}_r$, con $\sum_i \alpha_i^2 \leq 1$, ed è raggiungibile con l'ingresso $\mathbf{u}(\sigma) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{u}^{(i)}(\sigma)$. Se $M/r = \max_{\sigma, i} \|\mathbf{u}^{(i)}(\sigma)\|$, si ha

$$\|\mathbf{u}(\sigma)\| = \left\| \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{u}^{(i)}(\sigma) \right\| \leq \sum_{i=1}^r |\alpha_i| \|\mathbf{u}^{(i)}(\sigma)\| \leq M$$

12.5 Raggiungibilità completa e controllabilità

12.5.1 Raggiungibilità completa positiva

Il problema che intendiamo affrontare ora è quello della *completa raggiungibilità positiva* di un sistema positivo $\Sigma = (F, G)$. Più precisamente, vogliamo individuare condizioni necessarie e sufficienti che garantiscano la possibilità di raggiungere, in un congruo numero di passi oppure senza porre limiti sul loro numero, ogni stato di \mathbb{R}_+^n a partire dallo stato $\mathbf{0}$ e impiegando solo ingressi non negativi.

È ovvio che la completa raggiungibilità positiva implica la completa raggiungibilità, dal momento che \mathbb{R}_+^n è un cono solido; in generale tuttavia, come si è visto nell'esempio 12.4.1, esistono sistemi raggiungibili, i.e. con $X^R = \mathbb{R}^n$, per i quali sia C_k^R , per ogni $k \geq 1$, sia C^R e $\overline{C^R}$ sono sottoinsiemi propri di \mathbb{R}_+^n .

Proposizione 12.5.1 [RAGGIUNGIBILITÀ COMPLETA POSITIVA] Per un sistema discreto positivo $\Sigma = (F, G)$ i seguenti fatti sono equivalenti:

- i) $C^R = \mathbb{R}_+^n$;
- i') C^R include i vettori della base canonica;
- ii) fra le colonne di G, FG, F^2G, \dots figurano le n colonne di una matrice monomia;
- ii') $C_k^R = \mathbb{R}_+^n$ per qualche $k \geq 1$;
- ii'') per qualche $k \geq 1$ il cono C_k^R include i vettori della base canonica;
- ii''') per qualche $k \geq 1$, $\mathcal{R}_k = [G \quad FG \quad \dots \quad F^{k-1}G]$ ha una matrice monomia $n \times n$ come sottomatrice;
- iii) $C_n^R = \mathbb{R}_+^n$;
- iii') il cono C_n^R include i vettori della base canonica;
- iii'') $\mathcal{R} = [G \quad FG \quad \dots \quad F^{n-1}G]$ ha una matrice monomia $n \times n$ come sottomatrice.

PROVA Osserviamo preliminarmente che un insieme di vettori positivi genera il cono \mathbb{R}_+^n se e solo se tale insieme comprende le colonne di una matrice monomia. Infatti, per $i = 1, 2, \dots, n$ il vettore \mathbf{e}_i della base canonica è un elemento di \mathbb{R}_+^n , e una combinazione lineare a coefficienti positivi di colonne positive può produrre il vettore \mathbf{e}_i se e solo se essa coinvolge esclusivamente vettori i -monomi (ossia del tipo $\alpha \mathbf{e}_i$, $\alpha > 0$).

Di conseguenza, poiché i coni C^R , C_k^R e C_n^R hanno come insiemi di generatori rispettivamente le colonne dell'insieme di matrici $\{G, FG, F^2G, \dots\}$, le colonne di \mathcal{R}_k e le colonne di \mathcal{R} , si ottengono immediatamente le equivalenze

$$(i) \Leftrightarrow (i') \Leftrightarrow (i''), \quad (ii) \Leftrightarrow (ii') \Leftrightarrow (ii''), \quad (iii) \Leftrightarrow (iii') \Leftrightarrow (iii'').$$

Le implicazioni $(i'') \Leftarrow (ii'') \Leftarrow (iii'')$ sono ovvie.

Per l'implicazione $(i'') \Rightarrow (ii'')$ basta osservare che, se ciascuna delle n colonne di una matrice monomia figura fra le colonne di una delle matrici G, FG, F^2G, \dots , allora

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 \text{ è colonna di } F^{i_1}G \text{ per qualche } \alpha_1 > 0 \text{ e qualche intero } i_1 \geq 0,$$

$$\alpha_2 \mathbf{e}_2 \text{ è colonna di } F^{i_2}G \text{ per qualche } \alpha_2 > 0 \text{ e qualche intero } i_2 \geq 0,$$

...

Posto $k-1 = \max\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, la matrice \mathcal{R}_k contiene fra le sue colonne quelle di una matrice monomia.

Per l'implicazione $(ii'') \Rightarrow (iii'')$, se $G = [\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2 \ \dots \ \mathbf{g}_m]$ e se in \mathcal{R}_k è presente una colonna i -monomia, essa sarà espressa nella forma $F^\nu \mathbf{g}_\mu$, per qualche $\nu < k$ e $\mu \in \{1, 2, \dots, m\}$. Per il teorema di Coxson-Larson (Proposizione 11.3.2), sarà i -monomio uno fra i vettori $\mathbf{g}_\mu, F\mathbf{g}_\mu, \dots, F^{n-1}\mathbf{g}_\mu$. ■

È interessante notare che, qualora un sistema positivo sia completamente raggiungibile, tutti gli stati di \mathbb{R}_+^n possono essere raggiunti nei primi n passi, mentre l'assenza di completa raggiungibilità può portare a situazioni in cui il cono di raggiungibilità è strettamente crescente al crescere del numero k di passi, per ogni $k > 0$.

- ESERCIZIO 12.5.1 Si verifichi che per il sistema positivo

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

sono raggiungibili tutti e soli gli stati di \mathbb{R}_+^6 aventi struttura

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta + \nu \\ \alpha + \mu \\ \beta \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu \in \mathbb{R}_+$$

e che $C^R = C_5^R$. Per quali indici i la matrice \mathcal{R} non contiene vettori i -monomi?

12.5.2 Controllabilità

È ben noto che la raggiungibilità di un sistema lineare (senza vincoli di segno sull'ingresso), definita come la possibilità di raggiungere qualsiasi stato a partire dallo stato iniziale $\mathbf{0}$, implica la controllabilità di qualsiasi stato allo stato finale $\mathbf{0}$ e in definitiva la possibilità di portare il sistema da qualsiasi stato iniziale \mathbf{x}_i a qualsiasi stato finale \mathbf{x}_f . Più in

generale, anche nel caso in cui il sistema non sia completamente raggiungibile, tutti gli stati raggiungibili da $\mathbf{0}$ sono anche controllabili a zero e, comunque scelti \mathbf{x}_i e \mathbf{x}_f in X^R , esiste un ingresso che porta il sistema da \mathbf{x}_i in \mathbf{x}_f .

Nel caso dei sistemi positivi, il vincolo di ricorrere soltanto a ingressi non negativi fa sì che, una volta raggiunto da $\mathbf{0}$ uno stato \mathbf{x} del cono di raggiungibilità C_k^R , non sia in generale possibile controllare il sistema da \mathbf{x} in $\mathbf{0}$ e, *a fortiori*, in uno stato arbitrario di C_k^R . Quindi la completa raggiungibilità positiva (da $\mathbf{0}$) dell'ortante \mathbb{R}_+^n non implica necessariamente la controllabilità a $\mathbf{0}$ di tutti gli stati dell'ortante.

La proposizione seguente specifica le condizioni affinché si abbia la controllabilità a zero e la controllabilità fra arbitrari stati non negativi quando si ricorra a ingressi non negativi.

Proposizione 12.5.2 [CONTROLLO NON NEGATIVO A ZERO E FRA STATI ARBITRARI] *In un sistema positivo di dimensione n*

$$\mathbf{x}(t+1) = F\mathbf{x}(t) + G\mathbf{u}(t)$$

- i) ogni stato di \mathbb{R}_+^n è controllabile a $\mathbf{0}$ con ingressi non negativi se e solo se la matrice F è nilpotente;
- ii) per ogni coppia di stati non negativi $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_f)$ esiste un ingresso non negativo che controlla il sistema dallo stato iniziale \mathbf{x}_0 allo stato finale \mathbf{x}_f se e solo se la matrice F è nilpotente e la matrice \mathcal{R} contiene una sottomatrice monomia di dimensione n ;
- iii) il controllo a $\mathbf{0}$ nel caso (i) e il controllo da \mathbf{x}_0 a \mathbf{x}_f nel caso (ii) possono essere realizzati in un intervallo di tempo di durata non superiore ad n .

PROVA i) Se F è nilpotente, è ovvio che ogni stato è controllabile a $\mathbf{0}$ con l'ingresso nullo. Viceversa, supponiamo che il sistema sia controllabile a zero. Ciò richiede che, qualunque sia \mathbf{x}_0 , esistano un istante t e un ingresso non negativo $\mathbf{u}(\cdot)$ tali che

$$F^t \mathbf{x}_0 + \sum_{\sigma=0}^{t-1} F^{t-1-\sigma} G \mathbf{u}(\sigma) = \mathbf{0} \quad (12.46)$$

Gli addendi di (12.46) sono entrambi non negativi, quindi entrambi nulli. Essendo \mathbf{x}_0 un vettore generico di \mathbb{R}_+^n , per opportuni interi positivi t_i si ha $F^{t_i} \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$, $i = 1, 2, \dots, n$, e ciò implica la nilpotenza di F .

ii) Se valgono entrambe le condizioni (F è nilpotente e una selezione di n colonne di \mathcal{R} forma una sottomatrice monomia), allora è possibile portare in un tempo finito il sistema da \mathbf{x}_0 in $\mathbf{0}$ (per la controllabilità) e successivamente portarlo da $\mathbf{0}$ in \mathbf{x}_f (per la raggiungibilità).

Viceversa, se F non è nilpotente, esiste almeno un vettore \mathbf{e}_i della base canonica per cui si ha $F^t \mathbf{e}_i > \mathbf{0}$, $\forall t \geq 0$. Scegliendo $\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{x}_f = \mathbf{0}$, non esiste alcun controllo non negativo che porta il sistema da \mathbf{x}_0 a \mathbf{x}_f in un tempo finito. D'altra parte, se da \mathcal{R} non si può estrarre una matrice monomia, il cono di raggiungibilità C^R è un sottoinsieme proprio di \mathbb{R}_+^n e scegliendo $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_f \in \mathbb{R}_+^n \setminus C^R$, non è possibile giungere in \mathbf{x}_f con ingressi non negativi.

- iii) Se F è nilpotente, deve essere $F^n = 0$ e il controllo a zero richiede al più n passi.

Per quanto riguarda il controllo da \mathbf{x}_0 a \mathbf{x}_f nel caso (ii), basta utilizzare un controllo non negativo $\mathbf{u}(\cdot)$ che porti da $\mathbf{0}$ a \mathbf{x}_f in n passi, soddisfacendo cioè la condizione

$$\mathbf{x}_f = \sum_{\sigma=0}^{n-1} F^{n-1-\sigma} G \mathbf{u}(\sigma)$$

e osservare che, essendo $F^n = 0$, al medesimo stato \mathbf{x}_f si perviene anche partendo da uno stato iniziale non nullo. ■

- ESERCIZIO 12.5.2 (i) Se $F \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ e F non è nilpotente, esiste un vettore canonico \mathbf{e}_i per cui $F^t \mathbf{e}_i > \mathbf{0}$, $\forall t \geq 0$.

Quando F non è nilpotente, ma i suoi autovalori hanno tutti modulo minore di 1, ricorrendo a ingressi non negativi gli stati di \mathbb{R}_+^n possono essere controllati tutti a zero soltanto in termini asintotici, i.e. solo per $t \rightarrow +\infty$. Infatti, per l'esercizio 12.5.2, esiste almeno un vettore canonico \mathbf{e}_i tale per cui $F^t \mathbf{e}_i > \mathbf{0}$, $\forall t \geq 0$, e quindi, scegliendo $\mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_i$ si ricava, per ogni ingresso non negativo e per ogni t

$$\mathbf{x}(t) = F^t \mathbf{e}_i + \sum_{\sigma=0}^{t-1} F^{t-1-\sigma} G \mathbf{u}(\sigma) \geq F^t \mathbf{e}_i > \mathbf{0}.$$

Se, inoltre, \mathcal{R} contiene una matrice monomia, possiamo in generale affermare che, a partire da un arbitrario stato iniziale non negativo, sono raggiungibili gli stati finali \mathbf{x}_f interni all'ortante \mathbb{R}_+^n . Se \mathcal{R} non contiene una matrice monomia, sono raggiungibili da un arbitrario stato iniziale in C^R gli stati finali \mathbf{x}_f interni al cono C^R .

12.6 Osservabilità dei sistemi discreti positivi

In un sistema lineare positivo $\Sigma = (F, G, H)$ di dimensione n , il problema di determinare lo stato iniziale dai dati ingresso/uscita si riduce - come per il caso lineare ordinario - all'analisi della mappa che associa allo stato iniziale l'uscita in evoluzione libera

$$\omega_k : X \rightarrow \mathbb{R}^{kp} : \mathbf{x} \mapsto \mathcal{O}_k \mathbf{x} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{k-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_\ell(0) \\ \mathbf{y}_\ell(1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_\ell(k-1) \end{bmatrix}.$$

La condizione di positività comporta tuttavia alcune peculiari differenze rispetto al caso ordinario. Per evidenziarle, conviene premettere il seguente facile

Lemma 12.6.1 [NUCLEO POSITIVO DI UNA MATRICE NON NEGATIVA] Sia $M \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$ e sia

$$\ker_+(M) := \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^m, M\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \ker(M) \cap \mathbb{R}_+^m$$

il "nucleo positivo" di M . Condizione necessaria e sufficiente affinché $\ker_+(M) = \{\mathbf{0}\}$ è che M non abbia colonne nulle.

PROVA È chiaro che se la i -esima colonna di M è nulla, $M\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ e pertanto

$$\mathbf{e}_i \in \ker_+(M) \neq \{\mathbf{0}\}.$$

Viceversa, se nessuna colonna di M è nulla, da $\mathbf{1}_p^T M \gg \mathbf{0}^T$ segue $\mathbf{1}_p^T M\mathbf{x} > 0$, $\forall \mathbf{x} > \mathbf{0}$ e $M\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{x} > \mathbf{0}$. ■

Definizione 12.6.2 [OSSERVABILITÀ POSITIVA] *Un sistema positivo $\Sigma = (F, -, H)$ è positivamente⁹ osservabile in k passi se non esiste alcuno stato $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ che induca un'uscita in evoluzione libera nulla fino all'istante $k - 1$, ovvero se il nucleo positivo di \mathcal{O}_k contiene solo il vettore nullo*

$$\ker_+(\mathcal{O}_k) := \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n, \mathcal{O}_k\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}. \quad (12.47)$$

Per il lemma 12.6.1 la condizione (12.47) equivale ad assumere che \mathcal{O}_k non abbia colonne nulle, quindi è meno restrittiva dell'assunzione che \mathcal{O}_k abbia rango pieno n . Ciò ha una importante conseguenza: quando $\ker_+(\mathcal{O}_k) = \{\mathbf{0}\}$, dalla conoscenza di $\mathbf{y}_\ell(0), \dots, \mathbf{y}_\ell(k-1)$ si può stabilire se lo stato non negativo iniziale è, oppure non è¹⁰, lo stato $\mathbf{0}$, tuttavia, se \mathcal{O}_k ha rango minore di n , non tutte le classi di indistinguibilità in k passi che contengono uno stato non negativo ne contengono uno soltanto. In altre parole, l'osservabilità (positiva) in k passi di Σ non implica che dalla conoscenza della sua uscita in evoluzione libera su $[0, k-1]$ sia sempre possibile risalire in modo univoco allo stato positivo iniziale. Supponiamo infatti che si abbia

$$\ker_+(\mathcal{O}_k) = \{\mathbf{0}\} \quad \text{e} \quad \text{rank}(\mathcal{O}_k) < n.$$

Poiché \mathcal{O}_k non ha rango pieno, esiste un vettore non nullo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ per cui si ha $\mathcal{O}_k\mathbf{x} = \mathbf{0}$. D'altra parte, le condizione $\ker_+(\mathcal{O}_k) = \{\mathbf{0}\}$ implica $\mathbf{x} \notin \mathbb{R}_+^n$, ossia \mathbf{x} ha qualche componente negativa e qualche componente positiva e può essere decomposto (in infiniti modi) nella differenza di due vettori positivi, entrambi non nulli e necessariamente distinti

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}_+^n.$$

Dall'eguaglianza $\mathcal{O}_k\mathbf{x}_1 = \mathcal{O}_k\mathbf{x}_2$ si vede che coincidono sull'intervallo $[0, k-1]$ le uscite in evoluzione libera indotte dai due stati, quindi i due stati appartengono alla medesima classe di indistinguibilità nel futuro in k passi.

Esempio 12.6.1 Si consideri la coppia

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \quad H = [0 \quad 1 \quad 1]$$

Si verifica immediatamente che \mathcal{O}_k ha rango minore di 3 per ogni $k > 0$ e che per $k \geq 2$ tutte le colonne di \mathcal{O}_k sono diverse da zero. Quindi il sistema è (positivamente) osservabile in 2 (o più) passi, ma esistono coppie di stati positivi indistinguibili nel futuro, qualunque sia k .

Non è vero, tuttavia, che se uno stato $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ appartiene ad una classe di indistinguibilità in k passi, con $k \geq 2$, allora tale classe comprende necessariamente altri stati positivi, diversi da \mathbf{x} . Nell'esempio considerato, si ha

$$\ker(\mathcal{O}_k) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

⁹L'avverbio "positivamente" sarà sottaciuto ove il contesto non dia luogo ad ambiguità.

¹⁰Infatti, risulta $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ se e solo se si ha $\mathbf{y}_\ell(0) = \dots = \mathbf{y}_\ell(k-1) = \mathbf{0}$.

Quindi $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è indistinguibile in $k \geq 2$ passi da ogni stato positivo del tipo $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 - \alpha \\ 1 + \alpha \end{bmatrix}$, $|\alpha| \leq 1$.

Tuttavia, nessuno stato positivo è indistinguibile in $k \geq 2$ passi da $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$: gli stati di \mathbb{R}^3 che producono la medesima evoluzione libera di \mathbf{e}_1 sono $\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ma nessuno di essi è positivo per $\alpha \neq 0$.

La condizione che \mathcal{O}_k abbia rango n garantisce che ogni classe di indistinguibilità contenga un solo stato e quindi, in particolare, che sia unico lo stato che può indurre una specifica uscita libera non negativa della durata di k passi.

La condizione $\text{rango } \mathcal{O}_k = n$ può essere ulteriormente rafforzata, richiedendo che la matrice \mathcal{O}_k (o, equivalentemente, \mathcal{O}_k^T) includa una sottomatrice monomia di ordine n . Per comprendere qual è il significato di questa condizione, ricordiamo che, sulla base di quanto visto per la completa raggiungibilità dei sistemi positivi, l'equazione $\mathcal{O}_k^T \mathbf{u} = \mathbf{b}$ ammette una soluzione $\bar{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^n$ se e solo se la matrice \mathcal{O}_k^T include una matrice monomia.

Dato un vettore \mathbf{b} , per il lemma di Farkas¹¹ sono in alternativa l'esistenza di soluzioni in \mathbf{u} dell'equazione $\mathcal{O}_k^T \mathbf{u} = \mathbf{b}$, soggette alla condizione $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$, e l'esistenza di soluzioni in \mathbf{x} della disequazione $\mathcal{O}_k \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, soggette alla condizione $\mathbf{x}^T \mathbf{b} < 0$. Di conseguenza:

- se \mathcal{O}_k include una matrice monomia, qualunque sia $\mathbf{b} > \mathbf{0}$ vale la prima alternativa e la disequazione $\mathcal{O}_k \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, grazie alla sottomatrice monomia di \mathcal{O}_k , non ammette alcuna soluzione $\bar{\mathbf{x}}$ contenente qualche componente negativa (in particolare, non può essere soddisfatta la condizione $\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{b} < 0$);
- se \mathcal{O}_k non include una matrice monomia, esiste $\mathbf{b} > \mathbf{0}$ per cui $\mathcal{O}_k^T \mathbf{u} = \mathbf{b}$ non ammette soluzioni $\bar{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$, quindi esiste $\bar{\mathbf{x}}$ per cui $\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{b} < 0$ e $\mathcal{O}_k \bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$, e ovviamente $\bar{\mathbf{x}}$ non appartiene a \mathbb{R}_+^n .

Possiamo concludere che in un sistema positivo l'esistenza in \mathcal{O}_k di una sottomatrice $n \times n$ monomia equivale al fatto che, al variare dello stato iniziale in \mathbb{R}^n , le uscite non negative di k passi in evoluzione libera possano essere indotte soltanto dagli stati iniziali non negativi.

Se

$$C_k^O = \text{cono}(\mathcal{O}_k^T) = \text{cono}([H^T \quad F^T H^T \quad \dots \quad (F^T)^{k-1} H^T]) \quad (12.48)$$

è il cono generato in \mathbb{R}^n dalle colonne di \mathcal{O}_k^T , il suo duale è espresso da

$$\begin{aligned} (C_k^O)^* &= \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}^T \mathbf{y} \geq 0, \forall \mathbf{y} \in C_k^O\} \\ &= \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}^T \mathcal{O}_k^T \geq \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathcal{O}_k \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \end{aligned}$$

ovvero è costituito da tutti i vettori di stato (anche non appartenenti a \mathbb{R}_+^n) che inducono un'uscita in evoluzione libera non negativa nei primi k passi. Quindi

$$(C_k^O)^* \supseteq \mathbb{R}_+^n \supseteq C_k^O, \quad \forall k > 0 \quad (12.49)$$

e i tre insiemi coincidono se e solo se \mathcal{O}_k include una sottomatrice $n \times n$ monomia.

La proposizione che segue riassume e completa i risultati precedentemente discussi.

Proposizione 12.6.3 *Siano $\Sigma = (F, -, H)$ un sistema positivo di dimensione n , \mathcal{O}_k la matrice di osservabilità in k passi e $C_k^O = \text{cono}(\mathcal{O}_k^T)$ il cono generato dalle colonne di \mathcal{O}_k^T . Sono fatti equivalenti:*

¹¹cfr. Appendice B.5.1.

- $a_1)$ \mathcal{O}_k contiene una sottomatrice monomia di ordine n ;
 $a_2)$ $(C_k^O)^* = C_k^O = \mathbb{R}_+^n$;
 $a_3)$ [EVOLUZIONI LIBERE NON NEGATIVE INDOTTE SOLO DA VETTORI NON NEGATIVI]
 per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, se \mathbf{x} induce un'uscita in evoluzione libera non negativa negli istanti
 $0, 1, \dots, k-1$, allora $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Sono pure fatti equivalenti:

- $b_1)$ \mathcal{O}_k ha rango n ;
 $b_2)$ $C_k^O \subseteq \mathbb{R}_+^n$ è un cono solido;
 $b_3)$ Esiste un iperpiano $\mathcal{H}_{\mathbf{a}}$ (passante per l'origine) tale che

$$(C_k^O)^* \subset \mathcal{S}_{\mathbf{a}}^+, \quad C_k^* \cap \mathcal{H}_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{0}\};$$
 $b_4)$ [OGNI CLASSE DI INDISTINGUIBILITÀ CONTIENE AL PIÙ UN VETTORE NON NEGATIVO] se \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 sono arbitrari stati non negativi che inducono la medesima uscita in evoluzione libera negli istanti $0, 1, \dots, k-1$, allora $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Sono infine fatti equivalenti:

- $c_1)$ $\ker_+ \mathcal{O}_k = \{\mathbf{0}\}$;
 $c_2)$ \mathcal{O}_k non ha colonne nulle;
 $c_3)$ C_k^O contiene un vettore $\mathbf{a} \gg \mathbf{0}$;
 $c_4)$ se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $\langle \mathbf{x} \rangle \subset (C_k^O)^*$ allora $\langle \mathbf{x} \rangle \cap \mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{0}\}$, ovvero ogni retta per l'origine e interamente contenuta in $(C_k^O)^*$ non interseca l'ortante positivo, salvo nell'origine;
 $c_5)$ [OSSERVABILITÀ POSITIVA IN k PASSI] l'unico stato non negativo che induce un'uscita nulla in evoluzione libera per k passi è lo stato $\mathbf{0}$.

Le condizioni (a) implicano le (b), che a loro volta implicano le (c).

COMPLETAMENTO DELLA PROVA E' ovvio che $(a_1) \Rightarrow (b_1) \Rightarrow (c_1)$ e abbiamo già provato:

$$\begin{aligned}
 (a_2) &\Leftrightarrow (a_1) \Leftrightarrow (a_3) \\
 (b_1) &\Leftrightarrow (b_4) \\
 (b_1) &\Leftrightarrow (b_2) \quad (\text{è la proposizione 12.4.5 in cui si ponga } \mathcal{R}_k = \mathcal{O}_k^T) \\
 (c_1) &\Leftrightarrow (c_2) \quad (\text{lemma 12.6.1}) \\
 (c_1) &\Leftrightarrow (c_5) \quad (\text{definizione di osservabilità positiva})
 \end{aligned}$$

$(b_2) \Rightarrow (b_3)$ Sia $\mathbf{a} \gg \mathbf{0}$ un punto interno al cono solido C_k^O . Allora esiste un numero reale $m > 0$ per cui

$$\mathbf{a} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i \in C_k^O, \quad \forall \alpha_i, \quad |\alpha_i| < m.$$

Se $\mathbf{x} \in (C_k^O)^*$, deve essere $\mathbf{x}^T \mathbf{y} \geq 0$ per ogni $\mathbf{y} \in C_k^O$, quindi, in particolare,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{a} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}^T \mathbf{e}_i \geq 0, \quad \forall \alpha_i, \quad |\alpha_i| < m. \quad (12.50)$$

Se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, almeno una sua componente x_i è non nulla e basta scegliere in (12.50) $\alpha_j = 0$ se $j \neq i$ e $\alpha_i = \text{sgn}(x_i)m/2$ per concludere che $\mathbf{x}^T \mathbf{a} > 0$.

Quindi \mathbf{x} appartiene al semispazio $\mathcal{S}_{\mathbf{a}}^+ = \{\mathbf{y} : \mathbf{y}^T \mathbf{a} \geq 0\}$ ma non al semipiano che lo delimita: $\mathbf{x} \notin \mathcal{H}_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{y} : \mathbf{y}^T \mathbf{a} = 0\}$.

(b₃) ⇒ (b₂) Verifichiamo che C_k^O è solido ed \mathbf{a} è un suo punto interno. Si noti che, essendo C_k^O chiuso e convesso, $C_k^O = (C_k^O)^{**}$ e quindi $\mathbf{y} \in C_k^O \Leftrightarrow \mathbf{y}^T \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in (C_k^O)^*$. Dall'ipotesi (b₃) segue che tutti i vettori $\mathbf{x} \in (C_k^O)^*$, eccetto il vettore $\mathbf{0}$, soddisfano $\mathbf{a}^T \mathbf{x} > 0$, quindi $\mathbf{a} \in C_k^O$. Allora tutti i punti di un intorno di \mathbf{a} appartengono a C_k^O . Consideriamo infatti l'insieme dei vettori $\mathcal{V} := \{\mathbf{x} \in (C_k^O)^* : \|\mathbf{x}\| = 1\}$, ovvero l'intersezione del cono chiuso $(C_k^O)^*$ con la frontiera della sfera di raggio unitario. \mathcal{V} è un compatto, sul quale esistono $\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{V}} \mathbf{a}^T \mathbf{x} = m > 0$ e $\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{V}} |\mathbf{e}_i^T \mathbf{x}| = M_i > 0$. Se M è il più grande dei numeri M_i e se $|\alpha_i| < mM/n$ si ha, per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$,

$$\left[\mathbf{a} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i\right]^T \mathbf{x} = \mathbf{a}^T \mathbf{x} + \sum_{i=1}^n \alpha_i (\mathbf{e}_i^T \mathbf{x}) \geq m - \sum_{i=1}^n |\alpha_i| |\mathbf{e}_i^T \mathbf{x}| > 0$$

quindi tutti i punti dell'intorno di \mathbf{a} dato da $\{\mathbf{a} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i, |\alpha_i| < mM/n\}$ hanno prodotto interno positivo con i vettori di $(C_k^O)^*$ a norma unitaria, quindi prodotto interno non negativo con tutti i vettori di $(C_k^O)^*$ e pertanto appartengono a C_k^O .

(c₂) ⇒ (c₃) \mathcal{O}_k^T non ha righe nulle, quindi $\mathcal{O}_k^T \mathbf{1} \in C_k^O$ è strettamente positivo.

(c₃) ⇒ (c₄) Se \mathbf{x} e $-\mathbf{x}$ appartengono entrambi a $(C_k^O)^*$, dovendo risultare $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq 0$ e $-\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq 0$ si ha $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = 0$. Da $\mathbf{a} \gg \mathbf{0}$ discende che le componenti non nulle di \mathbf{x} non possono avere tutte lo stesso segno, ovvero $\langle \mathbf{x} \rangle \cap \mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{0}\}$.

(c₄) ⇒ (c₂) Se \mathcal{O}_k^T avesse la i -esima riga nulla, tutti i vettori di C_k^O avrebbero nulla la i -esima componente e $(C_k^O)^*$ conterrebbe sia \mathbf{e}_i che $-\mathbf{e}_i$. ■

Esempio 12.6.2 Si considerino le coppie positive $(F_1, H_1), (F_2, H_2), (F_3, H_3)$ con

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_2 = [1 \ 0 \ 0], \quad H_3 = [1 \ 1 \ 1]$$

Per la prima coppia la matrice \mathcal{O}_3 include una matrice monomia:

$$\mathcal{O}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_3^O = \text{cono}(\mathcal{O}_3^T) = \mathbb{R}_+^3, \quad (C_3^O)^* = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^T \mathbf{y} \geq 0, \forall \mathbf{y} \in C_3^O\} = \mathbb{R}_+^3$$

Per la seconda coppia \mathcal{O}_3 (e a fortiori \mathcal{O}_k per $k > 3$) ha rango pieno 3:

$$\mathcal{O}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_3^O = \text{cono}(\mathcal{O}_3^T) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \alpha_i \geq 0\},$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in C_3^O \Rightarrow (C_3^O)^* \subset \mathcal{S}_\mathbf{a}^+, \quad (C_3^O)^* \cap \mathcal{H}_\mathbf{a}^+ = \{\mathbf{0}\}$$

È anche immediato constatare dalle matrici $\mathcal{O}_k, k = 3, 4, \dots$ che per la coppia (F_2, H_2) si ha

$$C_3^O \subset C_4^O \subset C_5^O \subset \dots \quad \text{e} \quad (C_3^O)^* \supset (C_4^O)^* \supset (C_5^O)^* \supset \dots$$

dove tutte le inclusioni sono proprie.

La terza coppia non è osservabile (infatti \mathcal{O}_3 ha rango 2), ma per ogni $k > 0$ la matrice \mathcal{O}_k è strettamente positiva e quindi $\ker_+(\mathcal{O}_k) = \{\mathbf{0}\}$. L'autovalore di Perron della matrice F_3 è $\lambda_0 = 1$ (le somme di riga sono tutte unitarie) e l'autovettore sinistro corrispondente, normalizzato a un vettore stocastico, è

$$\mathbf{w}_0^T = [4/14 \quad 5/14 \quad 5/14].$$

Quindi $H_3 F_3^k$ tende ad allinearsi con l'autovettore \mathbf{w}_0^T quando $k \rightarrow \infty$. Gli altri autovalori di F sono $\lambda_1 = 0$ e $1/15$, con autovettori sinistri rispettivamente

$$\mathbf{w}_1^T = [1 \quad -1 \quad 0], \quad \mathbf{w}_2^T = [-2 \quad 1 \quad 1]$$

e si ottiene facilmente la decomposizione sulla base di Jordan $H_3 = 3\mathbf{w}_0^T - \frac{1}{14}\mathbf{w}_2^T$.

Quindi si ha, per ogni $k > 0$,

$$H_3 F_3^k = 3\mathbf{w}_0^T - \frac{1}{14} \left(\frac{1}{15}\right)^k \mathbf{w}_2^T = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 15 \\ 14 & 14 & 14 \end{bmatrix} - \frac{1}{14} \left(\frac{1}{15}\right)^k \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui è chiaro che

- (i) la direzione di \mathbf{w}_0 viene raggiunta solo asintoticamente;
- (ii) le colonne della matrice \mathcal{O}_k^T appartengono al sottospazio di \mathbb{R}^3 generato dai vettori \mathbf{w}_0 e \mathbf{w}_2 . I coni C_k^O , $k = 1, 2, \dots$ in esso contenuti formano una catena strettamente ascendente (le inclusioni sono tutte proprie) $C_1^O \subset C_2^O \subset C_3^O \subset \dots$ e i coni duali $(C_k^O)^*$ formano una catena strettamente discendente.

- ESERCIZIO 12.6.1 Si verifichi che $(C_k^O)^* = (C_{k+1}^O)^*$ implica $(C_{k+1}^O)^* = (C_{k+2}^O)^*$.

12.7 Realizzazione con sistemi discreti positivi

Il problema della realizzazione di una matrice di trasferimento razionale mediante un sistema lineare positivo è alquanto più difficile del problema discusso nei primi due paragrafi del capitolo 8.

In questo paragrafo accenneremo soltanto ad alcuni suoi aspetti, limitandoci al caso di sistemi con un ingresso e un'uscita; per una trattazione completa rinviamo alle monografie e agli articoli citati nella bibliografia alla fine del capitolo.

Definizione 12.7.1 *Un sistema positivo di dimensione N ,*

$$\Sigma_+ = (F, \mathbf{g}, H), \quad F \in \mathbb{R}_+^{N \times N}, \quad \mathbf{g} \in \mathbb{R}_+^{N \times 1}, \quad H \in \mathbb{R}_+^{1 \times N}, \quad d \in \mathbb{R}_+$$

è una realizzazione positiva della funzione di trasferimento propria

$$w(z) = \frac{\beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_n z^n}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_{n-1} z^{n-1} + z^n} \quad (12.51)$$

se $w(z) = H(zI_N - F)^{-1}\mathbf{g} + d$.

Σ_+ è una realizzazione positiva minima se $N \leq \dim(\tilde{\Sigma}_+)$ per ogni altro sistema positivo $\tilde{\Sigma}_+$ che realizzi $w(z)$.

Mentre ogni funzione razionale propria $w(z) \in \mathbb{R}(z)$ può essere realizzata ricorrendo a un sistema lineare con matrici reali, non sempre $w(z)$ ammette una realizzazione con matrici non negative.

Una condizione necessaria affinché siffatte realizzazioni possano esistere è che i coefficienti di Markov di $w(z)$ siano tutti non negativi. Infatti, se

$$w(z) = d + m_0 z^{-1} + m_1 z^{-2} + \dots$$

è lo sviluppo in serie di $w(z)$, ogni sua realizzazione $\Sigma = (F, \mathbf{g}, H, d)$ deve soddisfare le condizioni $m_k = HF^k \mathbf{g}$, $k = 0, 1, \dots$ e la positività di una realizzazione impone che tutti i coefficienti di Markov siano non negativi. Chiameremo *positiva*¹² una funzione razionale propria i cui coefficienti di Markov siano tutti non negativi.

- ESERCIZIO 12.7.1 Si denoti con $\mathbb{R}_{\text{pos}}(z)$ l'insieme delle funzioni razionali positive. Se $w_1(z)$ e $w_2(z)$ sono in $\mathbb{R}_{\text{pos}}(z)$,
 - (i) anche $w_1(z) + w_2(z)$ e $w_1(z)w_2(z)$ sono in $\mathbb{R}_{\text{pos}}(z)$,
 - (ii) se inoltre $w_1(\infty)w_2(\infty) < 1$, allora appartiene a $\mathbb{R}_{\text{pos}}(z)$ la funzione

$$w_1(z) \diamond w_2(z) := \frac{w_1(z)}{1 - w_1(z)w_2(z)} \quad (12.52)$$

Una domanda piuttosto ovvia, a questo punto, riguarda l'esistenza di realizzazioni positive per ogni funzione razionale positiva e la possibilità, quando una realizzazione positiva esiste, di inferire la dimensione minima di realizzazione positiva dal grado del denominatore nella rappresentazione irriducibile della funzione di trasferimento. La risposta a entrambi i quesiti è negativa e si basa su alcune connessioni fra i poli di una funzione razionale $w(z)$ e lo spettro delle sue realizzazioni positive.

Lemma 12.7.2 *Sia $w(z)$ una funzione razionale positiva che ammetta una realizzazione positiva di dimensione N .*

Esiste allora una realizzazione positiva $\Sigma_+ = (F, \mathbf{g}, H)$ di $w(z)$, di dimensione non superiore a N , tale che l'autovalore λ_0 coincidente con il raggio spettrale di F è anche polo di $w(z)$.

PROVA Non è restrittivo supporre $w(z)$ strettamente propria.

Sia $\bar{\Sigma}_+ = (\bar{F}, \bar{\mathbf{g}}, \bar{H})$ una realizzazione positiva di dimensione N . Se $\bar{\lambda}_0 \in \mathbb{R}_+$ è l'autovalore dominante non negativo di \bar{F} , esiste un autovettore destro $\bar{\mathbf{v}}_0$, positivo e soddisfacente

$$\bar{F}\bar{\mathbf{v}}_0 = \bar{\lambda}_0 \bar{\mathbf{v}}_0. \quad (12.53)$$

Se $\bar{H}\bar{\mathbf{v}}_0 = 0$, è anche $\bar{H}\bar{F}^i \bar{\mathbf{v}}_0 = 0$, $\forall i$, e la coppia (\bar{F}, \bar{H}) non è completamente osservabile. Senza perdita di generalità, possiamo riordinare la base dello spazio di stato in modo che \bar{H} e $\bar{\mathbf{v}}_0$ abbiano la seguente struttura

$$\bar{H} = [\bar{H}_1 \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T], \quad \bar{H}_1 \gg 0, \quad \bar{\mathbf{v}}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{v}}_0^{(3)} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{v}}_0^{(3)} \gg 0$$

Se partizioniamo la matrice F in modo conforme alle partizioni di \bar{H} e di $\bar{\mathbf{v}}_0$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{11} & \bar{F}_{12} & \bar{F}_{13} \\ \bar{F}_{21} & \bar{F}_{22} & \bar{F}_{23} \\ \bar{F}_{31} & \bar{F}_{32} & \bar{F}_{33} \end{bmatrix}$$

¹²Nella letteratura la terminologia non è uniforme: taluni autori chiamano positive le serie razionali che ammettono una realizzazione positiva (poiché la non negatività dei coefficienti di Markov di una serie razionale non implica necessariamente l'esistenza di una realizzazione positiva, esse costituiscono un sottoinsieme proprio delle funzioni razionali positive secondo la definizione adottata in questi Appunti)

e teniamo conto di (12.53), otteniamo $\bar{F}_{13} = 0$ e $\bar{F}_{23} = 0$ e il sottosistema

$$\bar{\Sigma}'_+ = \left(\begin{bmatrix} \bar{F}_{11} & \bar{F}_{12} \\ \bar{F}_{21} & \bar{F}_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{g}}_1 \\ \bar{\mathbf{g}}_2 \end{bmatrix}, [\bar{H}_1 \quad \mathbf{0}^T] \right)$$

fornisce una realizzazione positiva di $w(z)$ in dimensione minore di N .

Similmente, se $\bar{\mathbf{w}}_0^T$ è un autovettore positivo sinistro corrispondente a $\bar{\lambda}_0$, ove si abbia $\bar{\mathbf{w}}_0^T \bar{\mathbf{g}} = 0$ la coppia $(\bar{F}, \bar{\mathbf{g}})$ non è completamente raggiungibile e con un ragionamento analogo al precedente si perviene ad una realizzazione positiva di $w(z)$ in dimensione minore di N . Possiamo quindi ridurre progressivamente le dimensioni della realizzazione di $w(z)$ mantenendone il carattere di positività, fino a pervenire ad una realizzazione positiva $\Sigma_+ = (F, \mathbf{g}, H)$ in cui l'autovalore dominante positivo λ_0 della matrice F ha ogni autovettore destro positivo \mathbf{v}_0 e ogni autovettore sinistro positivo \mathbf{w}_0^T che soddisfano entrambe le condizioni

$$H\mathbf{v}_0 > 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{w}_0^T \mathbf{g} > 0. \quad (12.54)$$

Come si è provato nell'esercizio 8.3.2, λ_0 è allora un polo della funzione di trasferimento del sistema. ■

Dal lemma consegue che, se una funzione di trasferimento $w(z)$ ammette una realizzazione positiva, ne ammette anche una in cui l'autovalore positivo massimale λ_0 della matrice $F > 0$ coincide con uno dei poli di $w(z)$. Quindi, se p_0, p_1, \dots, p_r sono i poli di una funzione di trasferimento $w(z)$ realizzabile positivamente, possiamo concludere che

- per quanto dimostrato nel lemma 12.7.2, uno dei poli (p.es p_0) coincide con l'autovalore di Perron λ_0 della matrice $F > 0$ di qualche realizzazione positiva;
- poichè tutti i poli di $w(z)$ sono autovalori di F , p_0 è un polo di $w(z)$ a modulo massimale;
- se p_1, p_2, \dots, p_s , $s \leq r$, sono gli altri poli di $w(z)$ a modulo massimale (i.e. se $|p_i| = p_0 = \lambda_0$, $i = 1, 2, \dots, s$), per la proposizione 11.6.1 la fase di ciascuno di essi è un multiplo razionale di 2π .

Esempio 12.7.1 [SERIE IN $\mathbb{R}_{\text{pos}}(z)$ PRIVE DI REALIZZAZIONI POSITIVE] Come si è visto nell'esercizio 2.2.2, la serie a coefficienti non negativi

$$w(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin^2(k\phi)z^{-k} = \frac{(\sin^2 \phi)z(z+1)}{(z-1)(z^2 - 2(1 - 2\sin^2 \phi)z + 1)}$$

è razionale (quindi realizzabile) per ogni scelta di ϕ , ed ha come poli $z = 1$, $z = e^{2j\phi}$ e $z = e^{-2j\phi}$. Quando ϕ non è multiplo razionale di π , $w(z)$ non ammette alcuna realizzazione positiva, dal momento che nessuna matrice positiva può avere uno spettro periferico i cui elementi non abbiano una fase multipla razionale di π .

- **ESERCIZIO 12.7.2** [FUNZIONI RAZIONALI IN $\mathbb{R}_{\text{pos}}(z)$ CHE AMMETTONO REALIZZAZIONE POSITIVA] Si indichi con $\mathbb{R}_{\text{real pos}}(z)$ l'insieme delle funzioni razionali proprie che ammettono realizzazione positiva. Si verifichi che
 - (i) $\mathbb{R}_{\text{pos}}(z) \not\subseteq \mathbb{R}_{\text{real pos}}(z)$;
 - (ii) $\mathbb{R}_{\text{real pos}}(z)$ include \mathbb{R}_+ e tutte le funzioni scalari $\frac{\alpha}{z - \beta}$, con α e β numeri reali non negativi;
 - (iii) se $w_1(z)$ e $w_2(z)$ appartengono a $\mathbb{R}_{\text{real pos}}(z)$, lo stesso può dirsi della loro somma e del loro

prodotto;

(iv) se $w_1(z)$ e $w_2(z)$ appartengono a $\mathbb{R}_{\text{real pos}}(z)$ e se $1 > w_1(\infty)w_2(\infty)$, allora appartiene a $\mathbb{R}_{\text{real pos}}(z)$ anche $w_1(z) \diamond w_2(z)$.

‡ *Suggerimento per (iii) e (iv).* Se $\Sigma_k = (F_k, \mathbf{g}_k, H_k, d_k)$ è una realizzazione positiva di $w_k(z)$, $k = 1, 2$ i sistemi parallelo e serie

$$\Sigma_p = \left(\begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix}, [H_1 \quad H_2], d_1 + d_2 \right), \quad \Sigma_s = \left(\begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ \mathbf{g}_2 H_1 & F_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 d_1 \end{bmatrix}, [d_2 H_1 \quad H_2], d_1 d_2 \right)$$

sono realizzazioni positive di $w_1(z) + w_2(z)$ e di $w_1(z)w_2(z)$. È anche immediato dall'esercizio 9.1.5 che la connessione in retroazione di Σ_1 e Σ_2 è un modello di stato positivo che realizza $w_1(z) \diamond w_2(z)$ con matrici

$$F = \left(\begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{1 - d_1 d_2} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & d_1 H_2 \\ d_2 H_1 & H_2 \end{bmatrix} \right), \quad \mathbf{g} = \frac{1}{1 - d_1 d_2} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ d_1 \mathbf{g}_2 \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{1}{1 - d_1 d_2} [H_1 \quad d_1 H_2], \quad d = \frac{d_1}{1 - d_1 d_2}$$

Proposizione 12.7.3 Una funzione di trasferimento strettamente propria $w(z) \in \mathbb{R}_{\text{pos}}(z)$ è realizzabile positivamente se e solo se è ottenibile con operazioni di somma, prodotto e \diamond (definita in (12.52)) applicate a elementi dell'insieme delle funzioni razionali elementari

$$\frac{\alpha}{z - \beta}, \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+. \quad (12.55)$$

PROVA L'insieme delle funzioni di trasferimento strettamente proprie realizzabili positivamente è chiuso rispetto alle operazioni citate nell'enunciato. Infatti (cfr. Esercizio 12.7.2) date due funzioni razionali strettamente proprie $w_1(z), w_2(z) \in \mathbb{R}_{\text{real pos}}(z)$, sono ancora positivamente realizzabili e strettamente proprie

$$w_1(z) + w_2(z), \quad w_1(z)w_2(z), \quad w_1(z) \diamond w_2(z), \quad w_2(z) \diamond w_1(z).$$

Per provare che, con iterate applicazioni delle operazioni di somma (non di differenza!), di prodotto e di feedback alle funzioni (12.55), si possono ottenere tutte le funzioni strettamente proprie di $\mathbb{R}_{\text{real pos}}(z)$, procediamo per induzione rispetto alla dimensione n del sistema positivo strettamente proprio in grado di realizzare una $w(z) \in \mathbb{R}_{\text{real pos}}(z)$.

Se il sistema ha dimensione 1, la funzione di trasferimento è data direttamente da (12.55). Assumiamo, induttivamente, che per ogni sistema positivo strettamente proprio di dimensione non superiore a $n-1 \geq 1$ la funzione di trasferimento si ottenga applicando operazioni di somma, prodotto e \diamond alle funzioni (12.55) e proviamo che lo stesso vale per i sistemi positivi strettamente propri di dimensione n . Se $\Sigma = (F, \mathbf{g}, H)$ realizza positivamente in dimensione n la funzione $w(z)$, partizioniamo F, \mathbf{g} e H nella forma

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & \mathbf{c} \\ \mathbf{r}^T & f_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \quad H = [H_1 \quad h_2],$$

dove \mathbf{c} e \mathbf{r}^T sono rispettivamente una colonna e una riga non negative, e riscriviamo la funzione di trasferimento di Σ introducendo il complemento di Schur di $zI_n - F$:

$$s(z) = (z - f_{nn}) - \mathbf{r}^T (zI - F_{11})^{-1} \mathbf{c} \quad (12.56)$$

Si ha allora

$$w(z) = [H_1 \quad h_2] \begin{bmatrix} zI - F_{11} & -\mathbf{c} \\ -\mathbf{r}^T & z - f_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = [H_1 \quad h_2] \begin{bmatrix} M_{11}(z) & M_{12}(z) \\ M_{21}(z) & m_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} M_{11}(z) &= (zI - F_{11})^{-1} + (zI - F_{11})^{-1} \mathbf{c} s(z)^{-1} \mathbf{r}^T (zI - F_{11})^{-1} & M_{12}(z) &= (zI - F_{11})^{-1} \mathbf{c} s(z)^{-1} \\ M_{21}(z) &= s(z)^{-1} \mathbf{r}^T (zI - F_{11})^{-1} & m_{22}(z) &= s(z)^{-1} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} w(z) &= h_2 s(z)^{-1} g_2 \\ &+ H_1 (zI - F_{11})^{-1} \mathbf{g}_1 \\ &+ H_1 (zI - F_{11})^{-1} \mathbf{c} s(z)^{-1} \mathbf{r}^T (zI - F_{11})^{-1} \mathbf{g}_1 \\ &+ h_2 s(z)^{-1} \mathbf{r}^T (zI - F_{11})^{-1} \mathbf{g}_1 \\ &+ H_1 (zI - F_{11})^{-1} \mathbf{c} s(z)^{-1} g_2 . \end{aligned} \quad (12.57)$$

L'inverso del complemento di Schur (12.56)

$$s(z)^{-1} = \frac{1}{z - f_{nn}} \frac{1}{1 - \frac{1}{z - f_{nn}} \mathbf{r}^T (zI - F_{11})^{-1} \mathbf{c}} = \frac{1}{z - f_{nn}} \diamond \left[\mathbf{r}^T (zI - F_{11})^{-1} \mathbf{c} \right]$$

può essere realizzato mediante l'interconnessione in retroazione di due sistemi positivi strettamente propri, di dimensione 1 ed $n - 1$, rispettivamente. Ma allora ciascun addendo nell'espressione (12.57) di $w(z)$ è prodotto di funzioni di trasferimento di sistemi positivi, ognuno di dimensione non maggiore di $n - 1$, e per l'ipotesi induttiva la funzione di trasferimento di tali sistemi è ottenibile applicando operazioni di somma, prodotto e \diamond alle funzioni elementari (12.55). ■

Esempio 12.7.2 [DIMENSIONI MINIME DI REALIZZAZIONE E DI REALIZZAZIONE POSITIVA] Vogliamo investigare se la dimensione minima di realizzazione (senza vincoli di segno) di una funzione razionale implichi un confine superiore sulla dimensione minima delle sue eventuali realizzazioni positive.

(i) Premettiamo un risultato relativo ai coefficienti dello sviluppo in serie di potenze

$$\frac{1}{z^2 - 2z \cos \phi + 1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad 0 < \phi < \pi .$$

I primi due coefficienti sono ovviamente

$$c_0 = 1 = \frac{\sin \phi}{\sin \phi}, \quad c_1 = 2 \cos \phi = \frac{\sin(2\phi)}{\sin \phi}$$

e, se assumiamo su base induttiva che valga la relazione $c_\ell = \frac{\sin(\ell + 1)\phi}{\sin \phi}$ per $\ell \leq k + 1$, dalla condizione $c_{k+2} - 2 \cos \phi + c_k = 0, \forall k \geq 0$, segue¹³

$$c_{k+2} = \frac{2 \cos \phi \sin(k + 2)\phi}{\sin \phi} - \frac{\sin(k + 1)\phi}{\sin \phi}$$

¹³Si ricorra alla identità trigonometrica $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$.

$$= \frac{\sin(k+3)\phi + \sin(k+1)\phi}{\sin\phi} - \frac{\sin(k+1)\phi}{\sin\phi} = \frac{\sin(k+3)\phi}{\sin\phi}.$$

Quindi risulta

$$\frac{1}{z^2 - 2z \cos\phi + 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(k+1)\phi}{\sin\phi} z^k \quad (12.58)$$

(ii) Sia ora $\phi = \frac{2\pi}{n+3}$, $n > 0$ e sia $\theta = e^{j\frac{2\pi}{n+3}}$. Il polinomio $z^{n+3} - 1$ fattorizza nella forma

$$\begin{aligned} z^{n+3} - 1 &= \prod_{k=0}^{n+2} (z - \theta^k) = (z-1)(z^{n+2} + z^{n+1} + \dots + z + 1) \\ &= (z-1)(z-\theta)(z-\theta^{n-1})(z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0) \\ &= (z-1)(z^2 - 2z \cos\phi + 1)(z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0) \end{aligned}$$

in cui il polinomio $p(z) := z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0$ è palindromo¹⁴ e verifica l'identità

$$p(z) = (z^{n+2} + z^{n+1} + \dots + z + 1) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(k+1)\phi}{\sin\phi} z^k \quad (12.59)$$

Da (12.59) segue

$$\alpha_\ell = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{\sin(k+1)\phi}{\sin\phi}, \quad (12.60)$$

in cui ciascun addendo della sommatoria è positivo se $k < \frac{\pi}{\phi} - 1 = \frac{n+1}{2}$. Quindi i valori dei coefficienti α_ℓ sono positivi e crescenti con ℓ se

$$\ell < \frac{n+1}{2}.$$

I coefficienti $\alpha_0 = 1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n = 1$ sono in numero di $n+1$; se n è pari il coefficiente centrale è $\alpha_{\frac{n}{2}}$, se n è dispari la coppia di coefficienti centrali (fra loro eguali) è $\alpha_{\frac{n-1}{2}}, \alpha_{\frac{n+1}{2}}$. In entrambi i casi sono positivi i coefficienti di $p(z)$ i cui indici non superano l'indice (i due indici) centrale (centrali); quindi, essendo $p(z)$ palindromo, tutti i suoi coefficienti sono positivi.

(iii) Si consideri la fattorizzazione

$$z^{n+3} - 1 = (z-1)(z^2 - 2z \cos\phi + 1)p(z), \quad \phi = \frac{2\pi}{n+3}$$

in cui, per quanto dimostrato al punto (ii), il polinomio

$$p(z) = \sum_{\ell=0}^n \left(\sum_{k=0}^{\ell} \frac{\sin(k+1)\phi}{\sin\phi} \right) z^\ell$$

ha coefficienti positivi. La funzione di trasferimento

$$w(z) = \frac{p(z)}{z^{n+3} - 1} = \frac{1}{(z-1)(z^2 - 2z \cos\phi + 1)} \quad (12.61)$$

ammette ovviamente una realizzazione minima di dimensione 3. Una realizzazione positiva è costituita dal sistema in forma canonica di controllo, di ordine $n+3$, con matrici

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ 1 & 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

¹⁴I suoi coefficienti soddisfano le eguaglianze $\alpha_i = \alpha_{n-i}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \sum_{k=0}^1 \frac{\sin(k+1)\phi}{\sin\phi} & \sum_{k=0}^2 \frac{\sin(k+1)\phi}{\sin\phi} & \dots & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(k+1)\phi}{\sin\phi} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema (F, \mathbf{g}, H) ha dimensione minima fra i sistemi positivi che realizzano $w(z)$. Infatti (12.61) ha poli periferici in

$$z = 1, \quad z = \theta = e^{j\frac{2\pi}{n+3}}, \quad z = \theta^{-1}.$$

Nelle realizzazioni positive minime la forma normale della matrice F include un blocco diagonale irriducibile con autovalore periferico θ , quindi con indice di imprimitività (almeno) $n+3$.

Poichè nell'esempio considerato n è un numero positivo arbitrario, abbiamo verificato come la dimensione minima di realizzazione (senza vincoli di segno sulle matrici) non implichi alcun confine superiore sulla dimensione minima di una (eventuale) realizzazione minima positiva.

Il seguente teorema chiarisce quale legame intercorre fra una realizzazione minima di una funzione di trasferimento $w(z)$ e le sue eventuali realizzazioni positive.

Proposizione 12.7.4 [MAEDA E KODAMA] Sia $\bar{\Sigma} = (\bar{F}, \bar{\mathbf{g}}, \bar{H})$ una realizzazione minima¹⁵ di ordine n di una funzione di trasferimento strettamente propria $w(z)$. Siano inoltre

$$C_{\infty}^R = \text{cono}(\bar{\mathbf{g}}, \bar{F}\bar{\mathbf{g}}, \bar{F}^2\bar{\mathbf{g}}, \dots)$$

il cono generato in \mathbb{R}^n dai vettori $\bar{\mathbf{g}}, \bar{F}\bar{\mathbf{g}}, \bar{F}^2\bar{\mathbf{g}}, \dots$ e

$$(C_{\infty}^O)^* = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{H}\bar{F}^i\mathbf{x} \geq 0, \forall i\}$$

il duale del cono C_{∞}^O generato in \mathbb{R}^n dai vettori $\bar{H}^T, \bar{F}^T\bar{H}^T, (\bar{F}^T)^2\bar{H}^T, \dots$

La funzione $w(z)$ ammette una realizzazione positiva di dimensione N se e solo se esiste una matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times N}$ le cui colonne generano un cono (poliedrico) $\mathcal{P} = \text{cono}(P)$ soddisfacente le condizioni

$$\begin{aligned} 1. \quad & \bar{F}\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P} \\ 2. \quad & C_{\infty}^R \subseteq \mathcal{P} \\ 3. \quad & (C_{\infty}^O)^* \supseteq \mathcal{P} \end{aligned} \tag{12.62}$$

Le condizioni 1, 2, 3 sono equivalenti alle condizioni 1, 2, 3', con

$$3'. \quad \bar{H}^T \in \mathcal{P}^* \tag{12.63}$$

PROVA Verifichiamo anzitutto che, quando vale 1., le condizioni 3. e 3'. sono equivalenti. Si ha infatti infatti la seguente catena di equivalenze

$$\begin{aligned} & \bar{H}^T \in \mathcal{P}^* \\ \Leftrightarrow & \bar{H}\mathbf{x} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{P} \\ \Leftrightarrow & \bar{H}\bar{F}^i\mathbf{x} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{P}, \quad \forall i \geq 0 \quad \text{per 1.} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{x}^T(\bar{F}^T)^i\bar{H}^T \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{P}, \quad \forall i \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \mathbf{x}^T\mathbf{y} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{P}, \quad \forall \mathbf{y} \in C_{\infty}^O \quad \text{per la definizione di } C_{\infty}^O \\ \Leftrightarrow & \mathbf{x} \in (C_{\infty}^O)^* \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{P} \\ \Leftrightarrow & (C_{\infty}^O)^* \supseteq \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Supponiamo ora che la realizzazione minima $\bar{\Sigma} = (\bar{F}, \bar{\mathbf{g}}, \bar{H})$ soddisfi le condizioni 1, 2 e 3' per un opportuno $\mathcal{P} = \text{cono}(P)$.

¹⁵senza vincoli di segno, quindi raggiungibile ed osservabile,

Da 1. segue che ogni colonna di P viene trasformata da \bar{F} in elemento del cono \mathcal{P} e quindi in una combinazione lineare con coefficienti non negativi delle colonne di P . Ma ciò prova l'esistenza di una matrice $F \in \mathbb{R}_+^{N \times N}$ soddisfacente l'identità

$$\bar{F}P = PF \quad (12.64)$$

Da 2. segue che $\bar{\mathbf{g}}$ è esprimibile come combinazione lineare a coefficienti non negativi delle colonne di P , ovvero esiste $\mathbf{g} \in \mathbb{R}_+^{N \times 1}$ soddisfacente

$$\bar{\mathbf{g}} = P\mathbf{g} \quad (12.65)$$

Da 3'. segue inoltre $\bar{H}P \geq 0$, ovvero appartiene a $\mathbb{R}_+^{1 \times N}$ il vettore riga H definito da

$$\bar{H}P = H \quad (12.66)$$

Da (12.64), (12.65) e (12.66) si ottengono allora le identità

$$HF^i\mathbf{g} = \bar{H}PF^i\mathbf{g} = \bar{H}\bar{F}PF^{i-1}\mathbf{g} = \dots = \bar{H}\bar{F}^iP\mathbf{g} = \bar{H}\bar{F}^i\bar{\mathbf{g}}, \quad \forall i \geq 0,$$

quindi i coefficienti di Markov di $\bar{\Sigma} = (\bar{F}, \bar{\mathbf{g}}, \bar{H})$ e di $\Sigma_+ = (F, \mathbf{g}, H)$ coincidono e Σ_+ è una realizzazione positiva della funzione di trasferimento $w(z)$ di cui $\bar{\Sigma}$ è realizzazione minima.

Viceversa, supponiamo che $\Sigma_+ = (F, \mathbf{g}, H)$ sia una realizzazione positiva di dimensione N di $w(z)$. Se Σ_+ non è raggiungibile, sia $T = [T_1 \ T_2]$ una matrice di cambiamento di base che porta il sistema Σ_+ in forma standard di raggiungibilità

$$F \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad H \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{s}_1^T \ \mathbf{s}_2^T]$$

Il sottosistema $\Sigma^R = (A_{11}, \mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1^T)$ è raggiungibile, realizza $w(z)$ e soddisfa le relazioni $FT_1 = T_1A_{11}$, $\mathbf{g} = T_1\mathbf{r}_1$, $HT_1 = \mathbf{s}_1^T$, quindi il suo duale $\Sigma^O = (A_{11}^T, \mathbf{s}_1, \mathbf{r}_1^T)$ è osservabile, ha ancora $w(z)$ come funzione di trasferimento e soddisfa le relazioni

$$A_{11}^T T_1^T = T_1^T F^T, \quad \mathbf{s}_1 = T_1^T H^T, \quad \mathbf{r}_1^T T_1^T = \mathbf{g}^T. \quad (12.67)$$

Se $\mathcal{K} = \text{cono}(T_1^T)$, dalla prima delle (12.67) segue che ogni colonna di $A_{11}^T T_1^T$, essendo combinazione lineare a coefficienti non negativi delle colonne di T_1^T , appartiene a \mathcal{K} ; quindi

$$A_{11}^T \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K} \quad (12.68)$$

Dalla seconda delle (12.67) si ha

$$(A_{11}^T)^h \mathbf{s}_1 = (A_{11}^T)^h T_1^T H^T = (A_{11}^T)^{h-1} T_1^T F^T H^T = \dots = T_1^T (F^T)^h H^T \in \mathcal{K}, \quad h = 0, 1, \dots,$$

essendo i vettori $(F^T)^h H^T$ non negativi. Quindi il cono di raggiungibilità $C_\infty^R(A_{11}^T, \mathbf{s}_1)$ della coppia (A_{11}^T, \mathbf{s}_1) soddisfa

$$C_\infty^R(A_{11}^T, \mathbf{s}_1) \subseteq \mathcal{K} \quad (12.69)$$

Infine da $\mathbf{r}_1^T T_1^T = \mathbf{g}^T > \mathbf{0}$ si conclude

$$\mathbf{r}_1 \in \mathcal{K}^*. \quad (12.70)$$

Se Σ^O è raggiungibile, esso rappresenta una realizzazione minima di $w(z)$ e possiamo identificare il cono \mathcal{K} con il cono \mathcal{P} che stiamo cercando.

In caso contrario, il sistema $\Sigma^R = (A_{11}, \mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1^T)$ non è osservabile e lo si porta in forma standard di osservabilità con una matrice M di cambiamento di base

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} A_{11} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{11} & 0 \\ \bar{F}_{21} & \bar{F}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{g}}_1 \\ \bar{\mathbf{g}}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_1^T = [\bar{\mathbf{h}}_1^T \quad \bar{\mathbf{0}}^T] \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

ottenendo così una realizzazione minima $\bar{\Sigma} = (\bar{F}_{11}, \bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{h}}_1^T)$ di $w(z)$, con

$$M_1 A_{11} = \bar{F}_{11} M_1, \quad M_1 \mathbf{r}_1 = \bar{\mathbf{g}}_1, \quad \bar{\mathbf{h}}_1^T M_1 = \mathbf{s}_1^T$$

Poniamo allora

$$\mathcal{P} := M_1 \mathcal{K}^*$$

e verifichiamo che \mathcal{P} è un cono poliedrico e soddisfa 1., 2. e 3'.

Poiché \mathcal{K} e quindi il duale \mathcal{K}^* sono finitamente generati, il cono \mathcal{P} è pur esso finitamente generato. Osserviamo inoltre che per \mathcal{K}^* vale la relazione di inclusione $A_{11} \mathcal{K}^* \subseteq \mathcal{K}^*$, analoga alla (12.68), dal momento che

$$\begin{aligned} \mathbf{z} \in \mathcal{K}^* &\Rightarrow \mathbf{z}^T T^T \geq 0 \Rightarrow \mathbf{z}^T A_{11}^T T_1^T \geq 0 && \text{perché } A_{11}^T \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K} \\ &\Rightarrow (A_{11} \mathbf{z})^T T_1^T \geq 0 \Rightarrow A_{11} \mathbf{z} \in \mathcal{K}^* \end{aligned}$$

Allora

$$\bar{F}_{11} \mathcal{P} = \bar{F}_{11} M_1 \mathcal{K}^* = M_1 A_{11} \mathcal{K}^* \subseteq M_1 \mathcal{K}^* = \mathcal{P} \quad (12.71)$$

dimostra la 1. e

$$\begin{aligned} C_\infty^R(\bar{F}_{11}, \bar{\mathbf{g}}_1) &= \text{cono}(\bar{\mathbf{g}}_1, \bar{F}_{11} \bar{\mathbf{g}}_1, \bar{F}_{11}^2 \bar{\mathbf{g}}_1, \dots) = \text{cono}(M_1 \mathbf{r}_1, \bar{F}_{11} M_1 \mathbf{r}_1, \bar{F}_{11}^2 M_1 \mathbf{r}_1, \dots) \\ &= \text{cono}(M_1 \mathbf{r}_1, M_1 A_{11} \mathbf{r}_1, M_1 A_{11}^2 \mathbf{r}_1, \dots) \\ &= M_1 C_\infty^R(A_{11}, \mathbf{r}_1) \subseteq M_1 \mathcal{K}^* = \mathcal{P} \end{aligned} \quad (12.72)$$

dimostra la 2.

Infine $M_1^T \bar{\mathbf{h}}_1 = \mathbf{s}_1 \in \mathcal{K} = \mathcal{K}^{**}$ implica

$$(M_1^T \bar{\mathbf{h}}_1)^T \mathbf{z} = \bar{\mathbf{h}}_1^T (M_1 \mathbf{z}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{K}^*,$$

da cui seguono

$$\bar{\mathbf{h}}_1^T \mathbf{y} \geq 0, \quad \forall \mathbf{y} \in M_1 \mathcal{K}^* = \mathcal{P}$$

e la 3':

$$\bar{\mathbf{h}}_1 \in \mathcal{P}^* \quad \blacksquare$$

12.8 Riferimenti bibliografici

In aggiunta ai riferimenti [7] e [8] del capitolo 11, si segnalano

- (1) M. Araki “*Applications of M-matrices to the stability problems of composite dynamical systems*, J. Math. Anal. Appl. 52, pp.309-21, 1975

per la stabilità diagonale (Proposizione 12.1.1) anche dei sistemi positivi a tempo continuo,

- (2) L. van den Hof “*System theory and system identification of compartmental systems*” PhD thesis, Rijksuniversiteit Groningen, 1996

per l’analisi dei sistemi compartimentali e la loro identificazione,

- 3 P.G.Coxson, H.Shapiro “*Positive input reachability and controllability of positive systems*” Lin.Alg.Appl., vol 94, pp35-53, 1987

per risultati ed esempi applicativi riguardanti la completa raggiungibilità positiva.

Il problema della realizzazione con sistemi lineari positivi è stato oggetto di un’intensa ricerca. Gli esempi 12.7.1 e 12.7.2 costituiscono la punta di un iceberg: per approfondire l’argomento della realizzabilità di una serie razionale a coefficienti non negativi mediante un sistema positivo si rinvia al capitolo “*Série rationnelles a coefficients non negatifs*” di

- (4) M.Fliess “*Sur certaines familles de séries formelles*, thèse de doctorat d’État, Université de Paris VII, 1972

e ai paragrafi sulle funzioni analitiche positive e sulle funzioni \mathbb{R}_+ -riconoscibili di

- (5) S.Eilenberg “*Automata, languages and machines, vol.A*”, Academic Press, 1974

Gli articoli

- (6) H.Maeda, S.Kodama “*Positive realization of difference equations*” IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol CAS-24, pp.39-47, 1981
- (7) B.D.O.Anderson, M.Deistler, L.Farina, L.Benvenuti “*Nonnegative realization of a linear system with nonnegative impulse response*” IEEE Trans on Circuits and Systems, I Fund. Theory Appl., vol 43, pp 134-42, 1996
- (8) L.Farina “*On the existence of a positive realization*” Systems & Control Letters, vol 28, pp.219-26, 1996

forniscono utili strumenti per costruire, quando possibile, realizzazioni positive e realizzazioni positive minime.